

# BLONDEL ET LES OSCILLATIONS AUTO-ENTRETEENUES

JEAN-MARC GINOUX<sup>1</sup> & RENÉ LOZI<sup>2</sup>

RÉSUMÉ. En 1893, « physicien-ingénieur » André Blondel invente l'oscillographe bifilaire permettant de visualiser les tensions et courants variables. À l'aide de ce puissant moyen d'investigation, il entreprend tout d'abord l'étude des phénomènes de l'arc électrique alors utilisé pour l'éclairage côtier et urbain puis de l'arc chantant employé comme émetteur d'ondes radioélectriques en T.S.F. En 1905, il met en évidence un nouveau type d'oscillations non-sinusodales au sein de l'arc chantant. Vingt ans plus tard, Balthazar Van der Pol reconnaîtra qu'il s'agissait en réalité d'oscillations de relaxation. Pour expliquer ce phénomène, il fait appel à une représentation dans le plan de phase et montre que son évolution prend la forme de petits cycles. Pendant le premier conflit mondial la triode remplace peu à peu l'arc chantant dans les systèmes de transmission. Au sortir de la guerre, Blondel transpose à la triode la plupart de ses résultats par analogie avec l'arc chantant. En avril 1919, il publie un long mémoire dans lequel il introduit la terminologie « oscillations auto-entretenuées » et propose d'illustrer ce concept à partir de l'exemple du vase de Tantale qui sera ensuite repris par Van der Pol et par Philippe Le Corbeiller. Il fournit alors une définition d'un système auto-entretenu assez proche de celles qui seront données par la suite par Aleksandr' Andronov et Van der Pol. Pour étudier la stabilité des oscillations entretenues par la triode et par l'arc chantant il utilise cette fois une représentation dans le plan complexe et explicite l'amplitude en coordonnées polaires. Il justifie alors l'entretien des oscillations par l'existence de cycles qui présentent presque toutes les caractéristiques des cycles limites de Poincaré. Enfin, en novembre 1919, Blondel réalise, un an avant Van der Pol, la mise en équation des oscillations d'une triode. En mars 1926, Blondel établit l'équation différentielle caractérisant les oscillations de l'arc chantant, en tous points similaire à celle qu'obtient concomitamment Van der Pol pour la triode. Ainsi, tout au long de sa carrière, Blondel, a apporté une contribution fondamentale et relativement méconnue à l'élaboration de la théorie des oscillations non linéaires. L'objet de cet article est donc d'analyser ses principaux travaux dans ce domaine et de mesurer leur importance, voire leur influence en les replaçant dans la perspective du développement de cette théorie.

## 1. INTRODUCTION

À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle physiciens et ingénieurs observent un phénomène oscillatoire d'un genre nouveau dans différents dispositifs comme les machines série-dynamo [42], les machines hydrauliques munies d'un régulateur à action indirecte [43] ou les machines comportant des arcs électriques <sup>1</sup>. Ils cherchent tout d'abord à éliminer ces oscillations qu'ils qualifient alors d'entretenues <sup>2</sup> et considèrent comme délétères avant de réaliser ensuite toute leur importance.

En France, la vétusté des installations électriques des systèmes de signalisation maritime incite le jeune ingénieur André Blondel (1863-1938), affecté en 1889 au Service central des Phares et Balises, à effectuer des recherches sur l'*arc électrique* à courants alternatifs dans le but d'améliorer ce genre de dispositif.

« En 1889, les connaissances sur les propriétés des courants alternatifs étaient très limitées et leur étude était arrêtée par l'absence de moyens suffisamment pratiques d'analyse expérimentale. Chargé d'étudier la production et l'emploi des arcs électriques à courants alternatifs pour les phares, j'ai donc dû créer les instruments de travail nécessaire. » [17, p. IX]

C'est ainsi que Blondel [11] invente en 1893 l'oscillographe bifilaire permettant l'inscription directe et instantanée des tensions ou des courants variables qui sera ensuite amélioré par Duddell [32], puis peu à peu remplacé par l'oscilloscope cathodique de Braun [27]. Grâce à ce puissant moyen d'investigation, Blondel put déterminer toutes les propriétés de l'*arc électrique* à courants alternatifs et permit, d'après Joseph Bethenod [9, p. 751] qui fut son assistant de 1904 à 1907, de « faire accomplir un pas décisif à la théorie de l'arc électrique ».

À Londres, l'ingénieur britannique William Du Bois Duddell (1872-1917) fut mandaté, en 1899, par les autorités anglaises pour trouver une solution au problème du bruit engendré par le système d'éclairage des rues utilisant des lampes à arc électrique. En plaçant en dérivation un circuit oscillant comportant une bobine et un condensateur aux bornes de l'arc électrique il parvint à faire cesser le bruissement.

---

1. À cette époque c'était le cas de la plupart des systèmes d'éclairage.

2. Cette terminologie englobait à la fois les oscillations forcées et les oscillations auto-entretenues.

Après avoir ensuite constaté que pour certaines valeurs de la capacité et de l'inductance, ce dispositif émettait des sons audibles pour l'homme, Duddell [33, 34, 35] lui donna le nom de *musical arc*<sup>3</sup> et réalisa tout l'intérêt que ce dispositif présentait pour la Télégraphie Sans Fil<sup>4</sup>. En effet, on utilisait jusqu'alors dans le domaine de la Télégraphie Sans Fil (T.S.F.) l'*oscillateur de Hertz*. L'étincelle électrique qui « éclatait » entre deux sphères de cuivres engendrait une onde électromagnétique susceptible d'être interprétée par un récepteur comme un signal sous forme d'impulsions. L'un des inconvénients majeurs de ce dispositif était que l'oscillation électrique produite, c'est-à-dire, le signal était très rapidement amorti. L'*arc chantant* allait en revanche permettre d'entretenir ces oscillations donnant ainsi un essor considérable à la T.S.F.

Entre 1897 et 1905, André Blondel va publier plusieurs articles afin « d'élucider complètement les phénomènes de l'*arc chantant*. » [9, p. 752]. Tout d'abord, Blondel [13, p. 519] démontre, contrairement à une hypothèse alors très répandue, l'absence de *force contre-électromotrice* au sein de l'arc. En juillet 1905, Blondel [16] présente devant les membres de la Société française de Physique un imposant mémoire « Sur les phénomènes de l'arc chantant » dans lequel il met en évidence un nouveau type *discontinu* d'oscillations pour ce dispositif qu'il qualifie d'*arc sifflant*. Afin d'analyser la stabilité de ce régime oscillatoire il introduit la notion de *caractéristique d'oscillation* qui consiste à représenter son évolution dans le plan de phase et montre qu'elle prend la forme de petits cycles ce qui le conduit à fournir une première définition du concept d'*auto-entretien*.

Trois ans plus tard, lors d'une série de conférences (récemment redécouvertes<sup>5</sup>) effectuées en mai-juin 1908 à l'École Supérieure Professionnelle des Postes et Télégraphes où il enseigne depuis 1902, Henri Poincaré [53] est l'un des premiers en France<sup>6</sup> à établir l'équation incomplète<sup>7</sup> des oscillations entretenues par un *arc chantant*.

---

3. En France, il semble que ce soit l'ingénieur Paul Janet (1863-1937) qui ait traduit cette expression par *arc chantant* [39].

4. Il semble que dès 1898 Blondel ait envisagé la possibilité d'une telle application. Voir pli cacheté n° 6041, Blondel [18].

5. Voir à ce sujet la thèse de Ginoux [37].

6. L'École Allemande représentée par Theodor Hermann Simon [63] et Heinrich Barkhausen [8] semble y être parvenue concomitamment.

7. Dans la mesure où il ne fournit pas l'expression de la fonction non linéaire représentant la *f.é.m.* de l'arc.

Il parvient néanmoins à démontrer (vingt ans avant Andronov [2, 3]) que sa solution périodique est représentée dans le plan de phase par un *cycle limite stable* ce qui constitue une condition nécessaire à l'établissement d'un régime stable d'ondes entretenues.

Outre Atlantique, l'ingénieur américain Lee de Forest (1873-1961) dépose le 15 janvier 1907 un brevet n° 841386 intitulé "Wireless Telegraphy" pour un dispositif permettant l'amplification d'un signal électrique qu'il appelle *audion*<sup>8</sup>. Lorsqu'éclate le premier conflit mondial, un modèle d'*audion* est confié, dans des conditions rocambolesques<sup>9</sup>, au Général Gustave Ferrié (1868-1932) alors directeur technique du service de la Radiotélégraphie militaire qui demande au physicien Henri Abraham (1868-1943) de le reproduire et de le perfectionner. Ainsi modifié, l'*audion* va alors peu à peu s'imposer dans le corps des « transmissions » sous le nom de *lampe à trois électrodes* puis de *lampe T.M.*<sup>10</sup>

Dans une note présentée le 14 avril 1919 lors d'une séance de l'Académie des Sciences de Paris, Janet [40] met en évidence l'analogie<sup>11</sup> que présentent la *machine série-dynamo*, l'*arc chantant* et la *lampe à trois électrodes*. Il en déduit alors que ces trois dispositifs analogues, siège d'oscillations entretenues, sont régis par une seule et même équation qu'il établit de façon incomplète puisqu'il n'est alors pas en mesure d'explicitier la caractéristique d'oscillation de la lampe à trois électrodes, ni celle de l'arc chantant.

En avril 1919, dans son article « Sur les systèmes à oscillations persistantes, et en particulier sur les oscillations entretenues par auto-amorçage », Blondel [19] introduit la terminologie « auto-entretenu » et donne une seconde définition plus précise du concept de *système auto-entretenu* qu'il illustre à partir d'un exemple métaphorique : le siphon auto-amorceur (le vase de Tantale). Il analyse cette fois la stabilité de l'amplitude des oscillations entretenues par un arc chantant puis par une lampe à trois électrodes en se plaçant dans le plan complexe et obtient en coordonnées polaires des portions de spirales logarithmiques décrivant à nouveau des cycles.

---

8. L'audion générateur est le premier tube électronique de type triode.

9. Voir à ce sujet la thèse de Ginoux [37].

10. Télégraphie Militaire.

11. Dès 1891, Curie [30] exposait déjà les principes de l'analogie électromécanique.

En novembre 1919, est publiée aux *Comptes Rendus* une note de Blondel [21] intitulée « Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs » dans laquelle il propose de modéliser la caractéristique d'oscillation de la lampe à trois électrodes à partir d'une série à termes impairs (*quintique*) ce qui lui permet d'établir, un an avant Balthazar Van der Pol, l'équation différentielle de ses oscillations.

En effet, dans un article intitulé “A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations” achevé en juillet 1920 et publié en novembre et décembre de la même année, Van der Pol [65] effectue la mise en équation des oscillations entretenues par une triode en représentant sa caractéristique d'oscillation au moyen d'une fonction *cubique*.

Le 28 juin 1920 paraissait en France l'ouvrage de Jean-Baptiste Pomey [57] intitulé : « Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie ». Ancien « élève-ingénieur » de l'École Supérieure Professionnelle des Postes et Télégraphes (promotion 1883), Pomey était devenu professeur d'électricité théorique au sein même de cette école aux côtés d'Henri Poincaré avant d'en prendre la direction de 1924 à 1926. Dans le chapitre XIX intitulé « Génération des oscillations entretenues » Pomey [57, p. 372] proposait pour représenter la caractéristique de l'arc chantant de faire appel à une fonction cubique, précédant ainsi Van der Pol [65] de quelques semaines.

En septembre 1925, Pomey adressait un courrier au mathématicien Élie Cartan lui demandant d'étudier les conditions d'entretien d'oscillations pour l'équation différentielle établie par Janet [40] quelques années auparavant. La réponse ne se fit pas attendre. Moins d'une semaine plus tard, Cartan faisait parvenir à Pomey le texte d'une « Note sur la génération des oscillations entretenues » [29] « rédigée<sup>12</sup> » avec son fils Henri et dans laquelle il établissait l'existence d'une solution périodique pour cette équation<sup>13</sup>.

En mars 1926, reprenant la modélisation employée par Pomey [57], Blondel [26] établit pour l'arc musical de Duddell [33, 34] une équation différentielle analogue à celle qu'obtient concomitamment Van der Pol [67] pour les oscillations de la triode.

---

12. Au cours d'une entrevue accordée à M. C. Gilain le samedi 30 septembre 2000, Henri Cartan aurait reconnu ne pas avoir participé à la rédaction de cette note.

13. Des échanges épistolaires entre Pomey et Élie Cartan retrouvés lors de la disparition de son fils Henri en 2008 ont conduit à reconsidérer les circonstances dans lesquelles E. Cartan s'était intéressé à ce problème. Voir Ginoux *et al.* [38]

En mars 1926, Van der Pol [67] met en lumière le phénomène d'oscillations de relaxation dont il fournit l'équation « prototype » dans sa célèbre publication éponyme (*Philosophical Magazine, 1926*). Au cours des différentes conférences qu'il effectue en France entre 1928 et 1930, il s'attache à énumérer les dispositifs susceptibles d'engendrer un tel phénomène et reconnaît que l'*arc sifflant* découvert par Blondel en 1905 est bien le siège d'oscillations de relaxation puis choisit le vase de Tantale comme exemple métaphorique. Van der Pol précise ensuite le mécanisme d'entretien de ces oscillations en soulignant l'aspect non linéaire que présente la caractéristique d'oscillation de ces dispositifs. Néanmoins, bien qu'il ait représenté graphiquement la solution périodique de son équation dans le plan de phase, il ne réalise pas, jusqu'à la publication d'Andronov, qu'il s'agit d'un *cycle limite* de Poincaré.

En mai 1928, Alfred Liénard [46] démontrait l'existence et l'unicité de la solution périodique d'une équation différentielle de forme plus générale<sup>14</sup> que celle de Van der Pol [67] en prenant pour point de départ la contribution de MM. Cartan [29]. Cependant, bien que la description que donnait Liénard [46, p. 906] de la solution périodique corresponde exactement à la définition d'un *cycle limite* de Poincaré il ne faisait absolument pas usage de cette expression.

En octobre 1929, dans une note<sup>15</sup> intitulée « Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues » présentée devant les membres de l'Académie des Sciences, le mathématicien russe Aleksandr' Andronov [3] établissait (vingt ans après Poincaré [53]) que la solution périodique d'un oscillateur auto-entretenu correspond dans le plan de phase à un *cycle limite stable* de Poincaré.

Dans une lettre récemment découverte, datée d'Avril 1931 et adressée par André Blondel à Élie Cartan il suggérait qu'il avait entraperçu les oscillations de relaxation en mettant en évidence un nouveau type discontinu d'oscillations pour l'*arc sifflant*.

L'objet de cet article est donc d'analyser les principaux travaux de Blondel dans le domaine des oscillations non linéaires afin de mesurer leur importance voire leur influence sur la conceptualisation des oscillations auto-entretenues et des oscillations de relaxation.

---

14. Aujourd'hui connue sous le nom d'équation de Liénard-Van der Pol.

15. Ce résultat avait déjà été présenté par Andronov [2] quelques mois auparavant.

## 2. SUR LE PHÉNOMÈNE DE L'ARC CHANTANT

En 1883, alors âgé de vingt ans, André Blondel (1861-1938) intègre l'École Polytechnique, après avoir été reçu la même année à l'École Normale supérieure. Il entre ensuite à l'École des Ponts et Chaussées en 1885, d'où il sort major en 1888. Licencié ès Sciences Mathématiques en 1885 et ès Sciences Physiques en 1889 il suit les cours d'Henri Poincaré de 1888 à 1889 avant de commencer sa carrière d'ingénieur au Service central des Phares et Balises, un poste qui relevait alors de la Direction Générale des Ponts et Chaussées. Cependant, la vie et la carrière de Blondel ont été marquées par un fait frappant comme le rappellent ses principaux biographes [9, 28]. En effet, dès 1892 il semble avoir été atteint d'une maladie mystérieuse se manifestant par une semi-paralysie des jambes qui aurait été la conséquence d'une chute de cheval et qui l'aurait contraint à rester presque alité durant vingt-sept années.

« Il fut au Service des Phares et Balises de 1889 à 1927, mais il n'est presque jamais venu à son bureau et n'a presque jamais fait de tournées en mer ; cependant les premiers radiophares lui sont dus. Il fut Professeur à l'École des Ponts et Chaussées de 1893 à 1929, mais il n'y a jamais professé : cependant tous les cours d'Électricité dependent de ses exposés. Il fit les recherches expérimentales les plus profondes et a mis au point les appareils les plus délicats : cependant il n'alla jamais à son laboratoire. » [28, p. 4]

Ainsi attaché au corps des Ponts et Chaussées au service des Phares et Balises, il oriente ses recherches vers l'étude de l'arc électrique « en vue d'une application spéciale d'éclairage » [10, p. 552]. De 1891 à 1905, Blondel [10, 12, 13, 14, 15, 16] publie toute une série de travaux sur l'arc à courant alternatif puis sur l'arc à courant continu. Le 7 juillet 1905, Blondel présente devant les membres de la Société française de Physique<sup>16</sup> un imposant mémoire « Sur les phénomènes de l'arc chantant » [16] dans lequel il met en évidence deux types extrêmes d'arcs, l'un continu correspondant à l'arc chantant de Duddell [33, 33, 35] et caractérisé par des oscillations « presque sinusodales » [15], l'autre discontinu qu'il qualifie d'*arc sifflant* et dont la période ne se conforme plus à la formule de Thomson [64, p. 393] ni à celle de Duddell [35].

---

16. Cet exposé avait été précédé d'une courte note présentée le 13 juin 1905 par Éleuthère Mascart (1837-1908) devant les membres de l'Académie des Sciences. Voir Blondel [14]. Une version complète de ce travail avait alors été publiée dans la *L'Éclairage Électrique*. Voir Blondel [16].

Pour y parvenir, Blondel fait appel d'une part à l'analyse oscillographique (voir Fig. 2) et, introduit d'autre part la notion de *caractéristique dynamique* (voir Fig. 5) permettant d'étudier la stabilité des régimes d'oscillations de l'arc.

Pour étudier ce qu'il considère comme la « nature intime du phénomène » Blondel [16, p. 44] utilise le montage comportant un arc  $H$ , un condensateur de capacité  $C$ , un rhéostat  $R$ , deux bobines d'induction  $L$  et  $l$  et où  $ABDF$  représente le circuit d'alimentation provenant d'un secteur à courant continu et  $BCD$  le circuit d'oscillation (voir Fig. 1.).

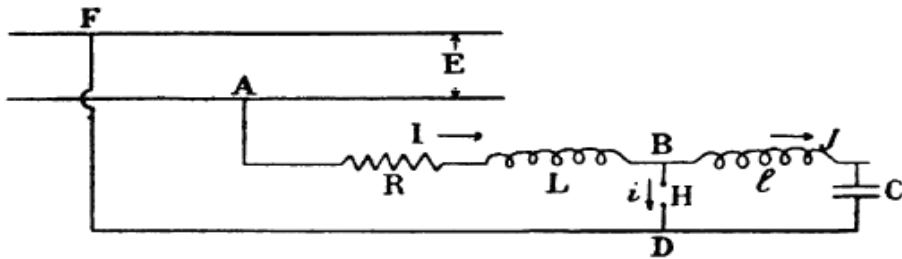


FIGURE 1. Montage des expériences sur l'arc chantant, d'après Blondel [16, p. 44].

En reliant à ce dispositif un oscillographe triple bifilaire qu'il a fait construire tout spécialement il obtient les clichés oscillographiques de la tension  $u$  aux bornes de l'arc et de l'intensité du courant  $i$  qui le traverse ainsi que l'intensité du courant  $j$  dans le condensateur  $C$ . Ceci lui permet d'établir l'existence de deux régimes d'oscillation.

Le premier type continu : *arc musical*, (Fig. 2) « auquel correspond un son soutenu assez pur, et qui est, à proprement parler, l'*arc musical* de Duddell, donne lieu à des courbes de courant dans l'arc et le condensateur présentant des formes *continues*, presque sinusodales, sans que l'intensité de l'arc descende à zéro ou tout au moins reste nulle pendant un temps appréciable; les variations de la tension aux bornes de l'arc sont contenues entre des limites très rapprochées. » [15, p. 79].



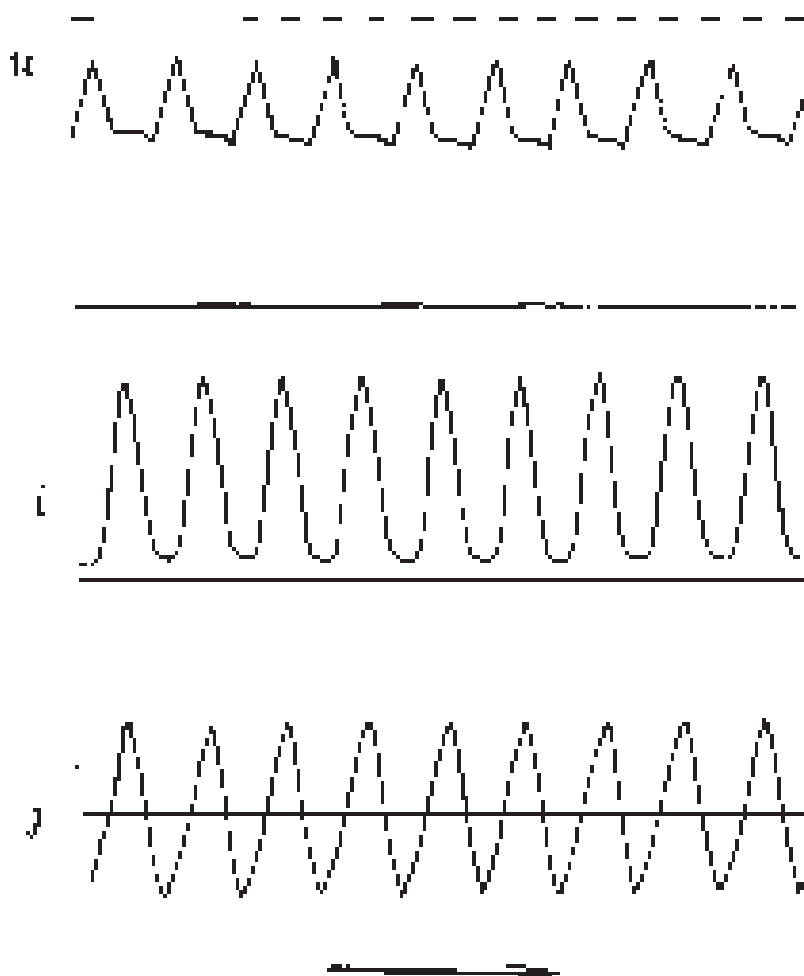


FIGURE 2. Courbes du premier type : *arc musical*, d'après Blondel [15, p. 79].

Blondel en déduit que bien que la période de l'arc chantant soit essentiellement variable et mal définie, elle peut, dans le cas du phénomène continu (premier cas) être prévue approximativement par la formule de Duddell<sup>17</sup> [35] :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

17. Duddell avait modifié la formule de Thomson [64, p. 393] :  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  afin de tenir compte de la résistance du circuit.

Le second type discontinu : *arc sifflant*<sup>18</sup>, (Fig. 3) « auquel correspond un son plus strident ou sifflant, est un phénomène discontinu caractérisé par ce que le courant de l'arc  $i$  présente des points anguleux et des zéros de temps appréciable, pendant lesquels le courant de charge  $j$  présente ordinairement des méplats, tandis que la tension entre les électrodes  $u$  subit une double oscillation de grande amplitude allant souvent au-dessous de zéro ou au-dessus de la force électromotrice d'alimentation. » [15, p. 80]

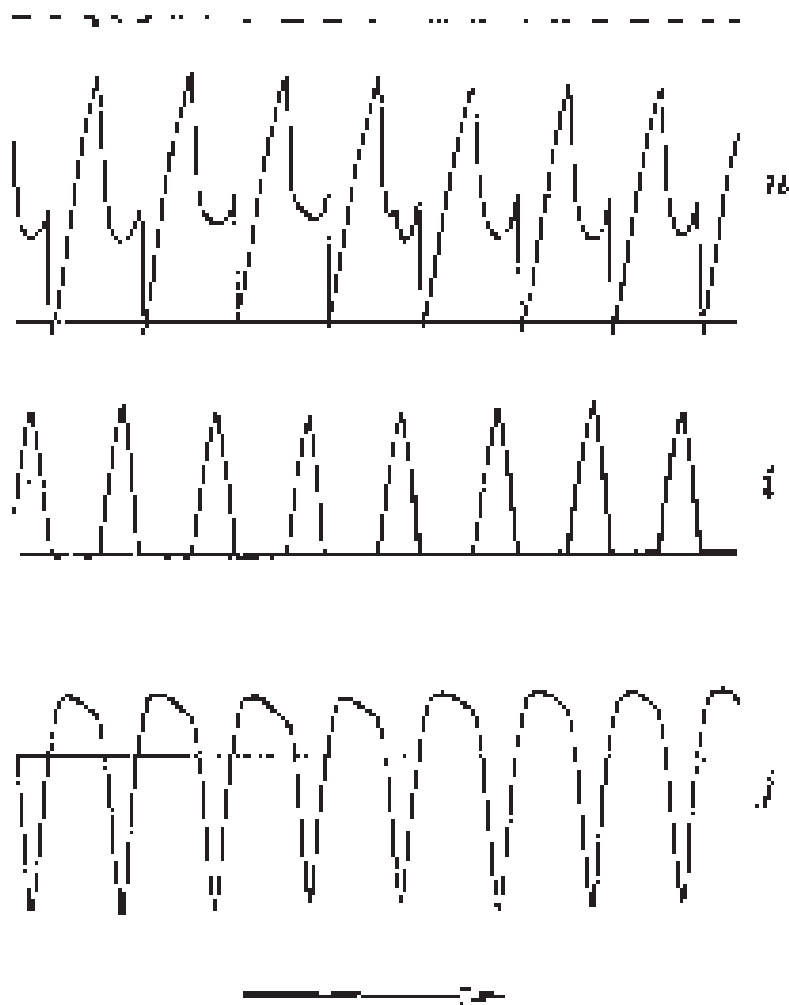


FIGURE 3. Courbes du second type : *arc sifflant*, d'après Blondel [15, p. 78].

18. Par la suite, Blondel lui donnera également le nom d'*arc grésillant*.

Puis, il ajoute que :

« Pendant l'extinction (ABC), la tension aux bornes de l'arc tombe brusquement aux environs de zéro, puis s'élève plus lentement à une valeur très notablement supérieure à sa valeur de régime; au moment de l'allumage (CD) elle tombe brusquement à cette valeur. »

[16, p. 48]

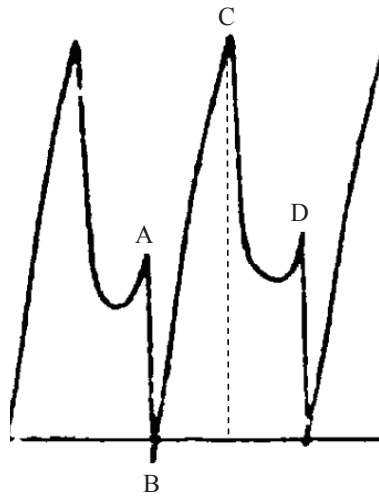


FIGURE 4. Extinction et allumage de l'arc sifflant, d'après Blondel [15, p. 78].

Blondel établit ensuite une analogie entre ces oscillations du second type produites par l'*arc sifflant* et le phénomène de la *décharge fractionnée*<sup>19</sup> mis en évidence en 1866 par le physicien français Jean-Mothée Gaugain (1811-1880). Il explique alors que la périodicité de ces oscillations n'a aucun rapport direct avec les constantes du circuit, contrairement à la formule de Duddell, mais dépend principalement de la composition du circuit d'alimentation et conclut son article par cette phrase :

« Les constantes du circuit d'alimentation déterminent les intervalles entre les groupes d'oscillations. »

[15, p. 97]

Blondel s'intéresse également au passage du régime du second type (discontinu) au premier (continu) et inversement, c'est-à-dire, des oscillations non-sinusodales aux oscillations sinusodales.

19. Voir Gaugain [36].

Il remarque alors que dans le cas discontinu la courbe de tension  $u$  aux bornes de l'arc n'est pas symétrique comme celle du courant qui le traverse et reste plus élevée pendant la phase montante du courant que pendant la phase descendante. Il déduit de ceci d'une part que la *résistance* de l'arc n'est pas constante mais variable. Ce fait avait été établi par Luggin [47, p. 568] quelques années auparavant qui avait introduit le concept de *résistance négative* et avait ensuite été corroboré par Blondel [13, p. 515]. D'autre part, que le cycle de régimes (ABCD) pendant une période n'est pas réversible. Il écrit :

« On pourrait d'ailleurs tracer ce cycle au moyen des deux courbes de l'intensité  $i$  et de la tension  $u$  en reportant en abscisses les valeurs de  $i$  et en ordonnées les valeurs  $u$  correspondantes. » [16, p. 48]

C'est ainsi qu'il introduit la notion de *caractéristique dynamique* (voir Fig. 5) qui consiste à se placer dans le plan de phase de Poincaré [51, p. 168] pour expliquer les phénomènes observés.

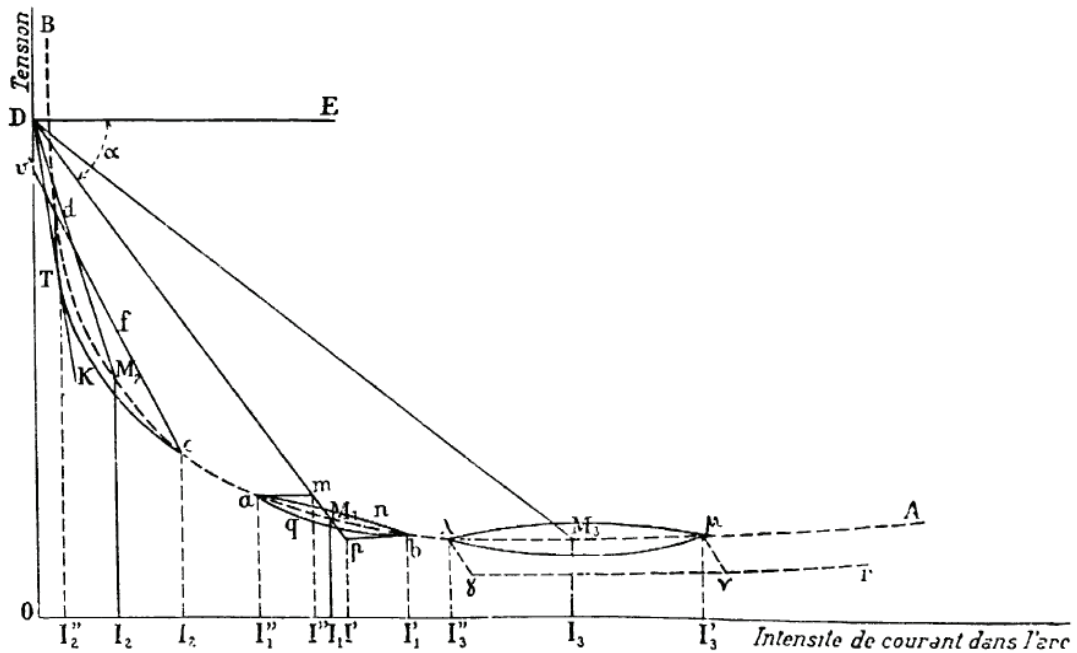


FIGURE 5. Caractéristique dynamique de l'arc, d'après Blondel [16, p. 53].

Il constate à l'oscillographe (comme le confirmera plus tard Pomey [57, p. 384]) que lorsqu'on fait varier l'intensité même très faiblement entre deux points limites  $I'_1$  et  $I''_1$ , le point régime  $M_1$  décrit, non pas une droite, mais un petit cycle  $ambqa$  parcouru dans ce sens<sup>20</sup>. Il écrit :

« Le graphique montre aussi qu'une partie du courant d'alimentation sert à compenser les pertes d'énergie par effet Joule ou autres dans le circuit oscillant, grâce au fait que la branche de charge  $amb$  du cycle est au dessus de la branche de décharge  $bqa$  ; le condensateur reçoit ainsi plus d'énergie qu'il n'a à en restituer. » [16, p. 54]

Cette description d'un dispositif dans lequel une partie de l'énergie produite est utilisée pour compenser les pertes et entretenir ainsi les oscillations constitue les prémices de la définition que Blondel [21, p. 120] donnera ensuite d'un système *auto-entretenu*. Enfin, en ce qui concerne l'amplitude et la fréquence des oscillations, il tire la conclusion suivante :

« L'amplitude de l'oscillation  $ab$  s'établit elle-même de façon que l'aire de la boucle égale l'énergie perdue dans le circuit d'oscillation, et la fréquence est fonction surtout de la vitesse de charge et de décharge du condensateur, déterminée par les constantes du circuit oscillant, mais modifiée certainement dans une certaine mesure par la composition du circuit d'alimentation et par la forme du cycle  $ambn$  décrit par le régime de l'arc. »

[16, p. 54]

Durant la guerre de 1914-1918, lorsque les services de la Radiotélégraphie militaire dirigé par son camarade d'école, le Général Ferrié (alors Colonel) envisagent de substituer la lampe à trois électrodes à l'arc chantant dans les postes de transmission, Blondel entreprend l'étude de ce nouveau dispositif « par analogie avec la théorie déjà connue de l'arc chantant » [20, p. 676] transposant ainsi la plupart des résultats qu'il avait obtenus.

---

20. Il est important de remarquer que c'est le même sens de parcours rétrograde qu'empruntera la solution périodique de l'équation de Van der Pol [67].

### 3. LE MULTIVIBRATEUR D'ABRAHAM ET BLOCH

Au début du premier conflit mondial, le physicien Henri Abraham est envoyé à Lyon par le Colonel Gustave Ferrié, alors directeur technique du service de Radiotélégraphie militaire, avec pour mission de reproduire et de perfectionner l'audion de Lee de Forest dans le but de réaliser une production à grande échelle permettant d'équiper rapidement les régiments de transmissions d'un dispositif plus fiable et plus efficace. Dès le mois de février 1915, Abraham s'était acquité de cette tâche en élaborant avec François Péri (1870-1938) et Jacques Biguet (1880-1970) la lampe T.M. également appelée « lampe française » qui atteignit pour l'époque un tel degré de perfection et de fiabilité qu'elle fut adoptée par l'armée française puis par les armées alliées et fut produite en France à plus d'un million d'exemplaires pendant la durée du conflit. De retour à Paris en mai 1915, Abraham reprend ses fonctions de directeur du Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure et, poursuivant ses recherches, invente<sup>21</sup> avec son collègue Eugène Bloch (1878-1944) le *multivibrateur instable*. Cet appareil est constitué de deux lampes T.M. dont chaque grille est reliée à la plaque de l'autre par un condensateur. Un tel montage produit des oscillations très riches en harmoniques. Abraham explique alors que c'est la raison pour laquelle il lui a donné le nom de *multivibrateur* (voir Fig. 6).

À cette époque on considérait que la période d'oscillations d'un circuit comportant un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$  était donnée par la formule de Thomson ou de Duddell. Cependant, Abraham et Bloch démontrent que les oscillations produites par le multivibrateur possèdent une période qui ne se conforme pas à ces formules. Concernant les inversions des courants de plaques  $P_1$  et  $P_2$  reproduites sur la Fig. 7. ils écrivent :

« On constate une série d'inversions très brusques des courants séparées par des longs intervalles pendant lesquelles la variation d'intensité du courant est très lente<sup>22</sup>. »

Ils ajoutent que les intervalles de temps qui séparent ces inversions correspondent aux durées de charges et de décharges des condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  à travers les résistances  $R_1$  et  $R_2$ . Ce qui semble faire écho à ce qu'avait écrit Blondel [15, p. 97] (voir p. 11).

---

21. Bien que les publications d'Abraham et Bloch [1] datent de 1919, ce dispositif a été élaboré entre novembre et décembre 1917 comme en attestent les différents documents classés « secret défense » récemment retrouvés. Voir Ginoux [37].

22. Rapport E.C.M.R. n° 2949, novembre 1917. Voir Ginoux [37].

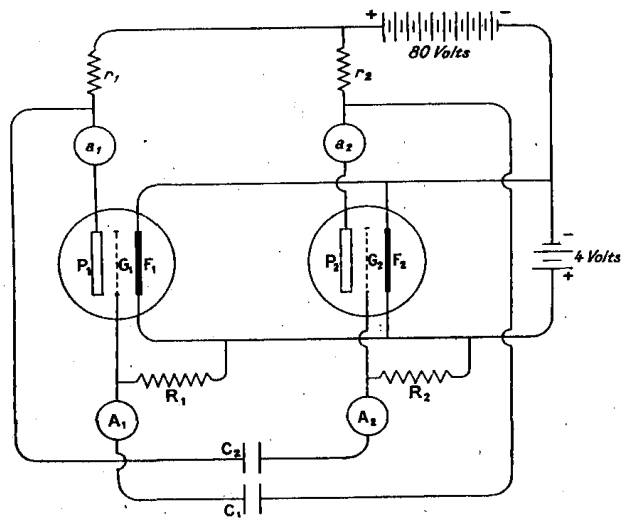


FIGURE 6. Multivibrateur, d'après Abraham et Bloch [1, p. 254].

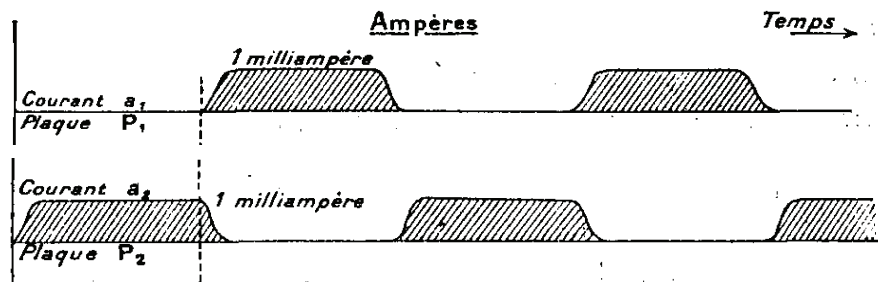


FIGURE 7. Inversions des courants de plaques  $P_1$  et  $P_2$ , d'après Abraham et Bloch [1, p. 256].

Ils en concluent<sup>23</sup> :

« La période du système est donc de l'ordre de  $C_1R_1 + C_2R_2$ . »

Au sortir du premier conflit mondial, l'ingénieur français Paul Janet va mettre en évidence une analogie électrotechnique entre trois dispositifs : la machine série-dynamo, l'arc chantant et la lampe à trois électrodes permettant d'une part de transposer tous les résultats obtenus précédemment pour l'arc chantant à la lampe à trois électrodes

23. Rapport E.C.M.R. n° 2949, novembre 1917.

et, d'autre part de décrire des phénomènes en apparence très différents par une unique équation différentielle.

#### 4. SUR UNE ANALOGIE ÉLECTROTECHNIQUE

Normalien à vingt-deux ans, agrégé en physique, Paul Janet (1863-1937), fils du philosophe Paul Janet (1823-1899), soutient en 1890 sa thèse de doctorat intitulée : « Étude théorique et expérimentale sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques », à la faculté des Sciences de Paris. Il est alors nommé maître de conférences à Grenoble où il inaugure en 1892, contre l'avis du doyen François Raoult, le tout premier cours d'Électricité Industrielle. Le succès est tel que François Raoult est amené à demander officiellement la création des cours et d'un laboratoire d'électricité dès la rentrée suivante. Deux ans plus tard, Paul Janet devient directeur de la toute nouvelle École Supérieure d'Électricité<sup>24</sup> à Paris où il poursuit son enseignement. Dès 1894, il s'intéresse aux oscillations d'une *machine série-dynamo* qui est constituée par l'association d'une *machine dynamo-électrique* jouant le rôle de générateur avec une *machine magnéto-électrique* se comportant comme un moteur. Le 8 décembre 1919, il est élu académicien libre. Quelques mois auparavant, le 14 avril, il présente une note intitulée : « Sur une analogie électrotechnique des oscillations entretenues » [40] dans laquelle il décrit ainsi un phénomène qui avait été observé un demi-siècle auparavant par Jean-Marie Anatole Gérard-Lescuyer [42] :

« Si l'on alimente, au moyen d'une génératrice excitée en série, un moteur à excitation séparée tournant à vide, on voit le moteur rapidement dans un sens, s'arrêter, repartir en sens inverse, etc. » [40, p. 764]

En réalité, quelques années plus tard, Van der Pol [68] considèrera l'expérience exposée par Janet comme un exemple d'*oscillations de relaxation*. Cette note de Janet [40] revêt une importance considérable. En tout premier lieu dans la mesure où elle met en lumière une « analogie électrotechnique » entre les oscillations entretenues produites par une machine série-dynamo et celles que présentent un arc chantant ou une lampe à trois électrodes.

« Il m'a semblé intéressant, écrit-il, de signaler les analogies inattendues que présente cette expérience avec les oscillations entretenues si largement utilisées aujourd'hui en télégraphie sans fil, par exemple avec celles qui

---

<sup>24</sup>. Il occupera ce poste jusqu'en 1937, date de son décès.



se produisent dans l'arc de Duddell ou dans les lampes à trois électrodes employées comme oscillateurs. »

[40, p. 764]

En second lieu, parce que Janet y souligne le transfert de technologie consistant à remplacer un composant électromécanique (arc chantant) par ce que l'on appellera plus tard un tube électronique, ce qui constitue une véritable révolution car l'arc chantant, du fait même de sa structure, rendait l'expérimentation complexe et délicate et sa reproductibilité difficile, voire impossible. Pour justifier cette « analogie électrotechnique » il fonde son raisonnement sur une analogie plus ancienne qui concerne les composants des circuits :

« La production et l'entretien des oscillations dans tous ces systèmes tiennent essentiellement à la présence, dans le circuit oscillant de quelque chose d'analogue à une résistance négative : or, la dynamo-série génératrice se comporte comme une résistance négative, et, d'autre part, le moteur à excitation séparée se comporte comme un condensateur. Il est curieux de constater que ces deux analogies ont été signalées il y a longtemps, la première par M. P. Boucherot et la seconde par M. Maurice Leblanc. » [40, p. 764]

Il considère que pour qu'il y ait analogie dans les effets, *i.e.* pour que l'on observe le même type d'oscillations dans la machine série-dynamo, la triode et l'arc chantant il faut qu'il y ait analogie dans les causes. Or, puisque la dynamo-série se comporte comme une résistance négative, qui est la cause responsable des oscillations, il y a bien analogie. Par conséquent, à ces différents dispositifs doit correspondre une seule et même équation.

« La mise en équation du problème, dans le cas du système matériel indiqué plus haut, est facile. Soit,  $e = f(i)$  la force électromotrice de la dynamo-série,  $R$  et  $L$  la résistance et la self-induction du circuit,  $\omega$  la vitesse angulaire du moteur à excitation séparée; on a évidemment

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e - k\omega$$

$$ki = K \frac{d\omega}{dt}$$

d'où

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + [R - f'(i)] \frac{di}{dt} + \frac{k^2}{K} i = 0 \quad (J_1). \gg$$

[40, p. 765]

La première équation que l'on peut réécrire ainsi :  $e = L \frac{di}{dt} + Ri + k\omega$  transcrit le fait que pour expliquer complètement le phénomène il faut tenir compte de :

- a. la *f.é.m.* de la dynamo :  $e = f(i)$  ;
- b. la *f.c.é.m.* du moteur :  $Ri + k\omega$  ;
- c. la *f.é.m.* de la bobine d'induction :  $L \frac{di}{dt}$ .

Janet obtient ainsi une équation ( $J_1$ ) analogue à celle qu'avait établie Poincaré [53] vingt ans auparavant pour les oscillations entretenues par un arc chantant. On peut donc s'étonner qu'il ne fasse pas référence à ce travail de Poincaré [53] alors qu'il cite ceux, plus anciens, de Leblanc (1899) et Boucherot (1904). En effet, lors d'une série de Conférences (récemment redécouverte<sup>25</sup>) effectuées en mai-juin 1908 à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes, Poincaré [53, p. 390] avait établi l'équation suivante pour décrire les oscillations d'un arc chantant :

$$Lx'' + \rho x' + \theta(x') + Hx = 0 \quad (HP_1)$$

où  $L$  et  $1/H$  correspondent respectivement à la self de la bobine d'induction de résistance interne  $\rho$  et à la capacité du condensateur placés en parallèle avec l'arc chantant. La variable  $x$  représente la charge du condensateur ( $x'$  l'intensité du courant dans la branche comportant le condensateur). Cette équation différentielle ( $P_1$ ) est néanmoins incomplète puisque Poincaré n'a pas cherché à expliciter la fonction  $\theta(x')$ , c'est-à-dire, la caractéristique d'oscillation (*f.é.m.*) de l'arc chantant. Il explique alors :

« On peut construire les courbes qui satisfont à cette équation différentielle, à condition de connaître la fonction  $\theta$ . Les oscillations entretenues correspondent aux courbes fermées, s'il y en a. Mais toute courbe fermée ne convient pas, elle doit remplir certaines conditions de stabilité que nous allons étudier. » [53, p. 390]

---

25. Voir Ginoux [37].

Puis, il démontre que l'établissement d'un régime d'ondes entretenues est conditionné par la présence dans l'espace des phases d'une courbe fermée qui correspond exactement à la définition qu'il a donnée quelques années auparavant d'un *cycle limite*<sup>26</sup> :

« *Condition de stabilité.* – Considérons donc une autre courbe non fermée satisfaisant à l'équation différentielle, ce sera une sorte de spirale se rapprochant indéfiniment de la courbe fermée. Si la courbe fermée représente un régime stable, en décrivant la spirale dans le sens de la flèche on doit être ramené sur la courbe fermée, et c'est à cette seule condition que la courbe fermée représentera un régime stable d'ondes entretenues et donnera lieu à la solution du problème. » [53, p. 391]

L'équation différentielle ( $J_1$ ) établie par Janet [40] est également incomplète comme il le souligne d'ailleurs :

« Mais le phénomène est limité par la courbure de la caractéristique, et en fait, il s'établit des oscillations régulières, non-sinusoidales, régies par l'équation ( $J_1$ ) qu'on ne pourrait intégrer que si l'on connaissait la forme explicite de la fonction  $f(i)$ . » [40, p. 765]

En comparant cette dernière citation de Janet avec la première de Poincaré on constate que tous deux sont conscients du problème que constitue la représentation mathématique de la *caractéristique d'oscillation* de ces dispositifs (machine série-dynamo, arc chantant ou lampe à trois électrodes) qui fait appel à l'interpolation polynômiale d'une courbe et qui relève de ce qu'on appelle aujourd'hui la *modélisation d'observables*. Ceci implique l'obtention d'un nombre minimum de points, *i.e.*, d'une série de données ou de mesures ce qui nécessite d'une part la reproductibilité de l'expérience à l'identique et, d'autre part d'avoir un appareil de mesure susceptible de fournir des valeurs suffisamment précises. Cependant, en établissant dans cette note une analogie entre trois dispositifs différents, Janet a montré qu'ils relevaient du même phénomène oscillatoire dont il a fourni d'une part l'équation, certes incomplète, mais générale et, a d'autre part souligné le fait que ces oscillations étaient « non-sinusodales ». De plus, il a mis en lumière la principale difficulté à surmonter pour compléter son équation. En novembre de cette même année 1919, c'est Blondel [21] qui va résoudre ce problème en établissant un an avant Van der Pol [65] l'équation de la triode.

---

26. Voir Ginoux [37].

## 5. SUR LES OSCILLATIONS AUTO-ENTRETENUES

Vers 1919, peu après la mort de son père, Blondel se remit curieusement à marcher [9, 28, p. 755, p. 26]. Durant cette période Blondel [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] réalisa toute une série d'articles sur les oscillations entretenues par l'*audion générateur*, c'est-à-dire, la *lampe à trois électrodes*. Dans le premier d'entre eux intitulé « Sur les systèmes à oscillations persistantes, et en particulier sur les oscillations entretenues par auto-amorage », publié en avril 1919 dans le *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, Blondel [19, p. 118] introduisait la terminologie « oscillations auto-entretenu ».

### 5.1. Introduction de la terminologie.

Il est assez légitime de s'interroger sur l'origine de la terminologie « auto-entretenu » et sur la date de son apparition dans la littérature scientifique. Des recherches entreprises dans les *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, dans la *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, dans la *Lumière Électrique*, l'*Éclairage Électrique* ainsi que dans le *Journal de Physique Théorique et Appliquée* n'ont pas permis, pour l'instant, de trouver une trace de ce néologisme avant 1919. La première occurrence semble être celle introduite par Blondel [19].

### 5.2. Sur les oscillations entretenues par auto-amorage.

Dans la première partie de son mémoire, Blondel [19] propose une nouvelle classification des oscillations selon trois types :

#### 1. OSCILLATIONS ENTRETENUES PROPREMENT DITES

- a) *Oscillations entretenues par action discontinue.*
- b) *Oscillations entretenues par action continue ou oscillations auto-entretenu.*

#### 2. OSCILLATIONS PERSISTANTES PAR ÉCOULEMENT FRACTIONNÉ

#### 3. OSCILLATIONS DE LONGUE PÉRIODE PRODUITE PAR INVERSION DE LA FORCE AGISSANTE

Blondel [19, p. 117] explique que le premier type (1.a) correspond aux oscillations entretenues telles qu'on les entend aujourd'hui et illustre son propos avec le pendule entretenu. En ce qui concerne le type (1.b) il choisit curieusement l'exemple des oscillations entretenues par un

*ronfleur*<sup>27</sup>. Il précise alors que le condensateur de capacité  $C$  que comporte ce circuit peut être représenté par une antenne de T.S.F. jouant un rôle analogue. Peut-être s'agit-il là d'une manière de se rattacher au domaine de la Radiotechnique. Blondel ajoute ensuite :

« ... on constate aisément que le circuit oscillant pourra entretenir lui-même ses oscillations, si le courant qui le parcourt provoque d'une manière convenable la production d'un courant alternatif ou d'une force électromotrice alternative dans une source étrangère disposant par elle-même d'une énergie suffisante pour que le circuit oscillant reoive plus d'énergie du courant ainsi provoqué qu'il n'en dépensera lui-même dans le mécanisme provoquant la formation de ces courant auxiliaires. »

[19, p. 120]

Il est intéressant de comparer cette phrase avec celle que prononcera Balthazar Van der Pol lors de sa seconde conférence le 11 mars 1930 à l'École Supérieure d'Électricité à Paris :

« Une oscillation de relaxation a lieu, d'une manière générale, toutes les fois qu'un mécanisme, contenant une source d'énergie continue, permet à un phénomène essentiellement apériodique de se répéter automatiquement un nombre indéfini de fois. » [69, p. 300]

Blondel met alors en évidence la cause responsable de l'entretien de ces oscillations :

« ... si, au contraire, l'apport d'énergie est plus fort que la dépense, *l'amortissement deviendra négatif* : il y aura entretien des oscillations et tendances de celles-ci à s'accroître avec le temps, d'autant plus que la valeur absolue de l'amortissement négatif sera grande. Si cette condition est remplie pour les oscillations voisines de zéro, elles seront *auto-amorantes*. » [19, p. 120]

Il fait ici implicitement référence au concept de *résistance négative* introduit par Hans Luggin [47, p. 568] pour expliquer l'entretien des oscillations d'un arc chantant. On peut également mettre cette phrase en perspective avec celle énoncée par Van der Pol lors de son premier exposé à Paris le 24 mai 1928 dans la Salle de la Société de Géographie :

---

27. Relais électromagnétique à lame vibrante, dont le fonctionnement se traduit par un ronflement de basse fréquence, qui remplace parfois une sonnette dans les installations téléphoniques.

« Mais en électrotechnique et particulièrement dans le domaine de radio-télégraphie nous avons à notre disposition des résistances d'un caractère négatif. Au lieu de dissiper de l'énergie ces résistances peuvent *fournir* de l'énergie. Il est évident par conséquent qu'elles ne se présentent que dans les systèmes qui contiennent une source d'énergie. » [68, p. 367]

Dans le second type (2.), Blondel cite les exemples de l'arc musical de Duddell, de l'arc de *seconde espèce* qu'il a « découvert » en 1905 (voir Blondel [14, 15, 16]) et du vase de Tantale ou du vase culbuteur <sup>28</sup>.

Blondel illustre le troisième type (3.) d'oscillations à partir de l'expérience de la machine série-dynamo décrite par Janet [40] dans sa note « Sur une analogie électrotechnique » dont il rappelle le principe et, aussi à partir des travaux d'Henry Léauté [43] concernant les machines hydrauliques munies d'un régulateur à action indirecte. Ce dernier avait en effet employé, pour étudier la stabilité des oscillations « à longues périodes » au sein de ces dispositifs, un diagramme comportant position en abscisse et vitesse en ordonnée correspondant exactement à une représentation dans le *plan de phase* de Poincaré. Il avait alors obtenu des courbes fermées en tous points similaires à des *cycles limites* de Poincaré. Dans l'édition russe ainsi que dans l'édition anglo-saxonne de l'ouvrage d'Andronov *et al.* [6] remanié par son élève N.A. Zheleztsov, il rappelait dans une note de bas de page du second paragraphe du premier chapitre [6, p. 39] que Léauté avait été le premier à faire usage du concept de *plan de phase* pour décrire les courbes intégrales fermées de ces machines hydrauliques sans cependant réaliser qu'il s'agissait de *cycles limites* de Poincaré.

Dans la dernière partie de son exposé Blondel [19, p. 153] va mettre en évidence la distinction entre *oscillations entretenues* et *oscillations auto-entretenues* à partir de nombreux exemples illustrés avec un étonnant diagramme qui consiste à représenter l'amplitude des oscillations sous la forme trigonométrique d'un nombre complexe :

« La différence entre les oscillations entretenues par action discontinue et celles entretenues par action continue peut être précisée par un diagramme en remarquant que cette oscillation amortie peut s'écrire sous la forme :

---

28. Il s'agit d'un récipient monté sur un axe pivotant placé en son centre et qui bascule brutalement lorsque le niveau de remplissage a rompu l'équilibre. Voir Van der Pol [69, p. 307] et Le Corbeiller [44, p. 6 et p. 42].

$$\rho = Ae^{(-\alpha+j\beta)t},$$

qui se prête à une représentation graphique comme toutes les fonctions imaginaires (*fig. 8*).

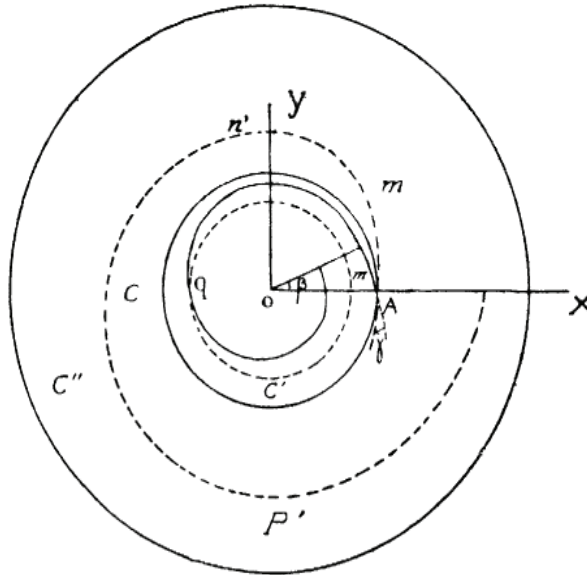


FIGURE 8

Si l'on trace  $\rho$  en coordonnées polaires et désigne par  $\beta t$  l'angle décrit à partir d'un axe  $OX$  par le rayon figuratif  $\rho$ , le point mobile  $m$ , extrémité de ce rayon, décrit, comme on le sait, une spirale logarithmique qui se réduirait au cercle de rayon  $OA$  si l'amortissement était nul; l'amortissement donne à la tangente de la courbe, par rapport au rayon un coefficient angulaire  $-\frac{\beta}{\alpha}$ . »

[19, p. 153]

Il considère alors tout d'abord le cas des oscillations entretenues par action discontinue, *i.e.* des *oscillations forcées* pour lesquelles il étudie graphiquement « l'effet de l'impulsion d'entretien » sur la forme du diagramme (voir Fig. 1) avant de s'intéresser à celui des oscillations entretenues par action continue, *i.e.* des *oscillations auto-entretenuës*.

« Théoriquement l'entretien continu doit fournir au mobile (ou à la variable électrique qui en tient lieu dans les oscillations électriques) une énergie compensant l'énergie dégradée par l'amortissement spontané du système abandonné à lui-même. L'entretien idéal serait donc celui qui aurait pour effet de substituer à la spirale le cercle C, qui a même rayon initial. Mais un tel système ne présenterait pas de stabilité, tout au moins dans l'hypothèse où l'amortissement  $\alpha$  est indépendant de l'amplitude. »

[19, p. 154]

Il souligne ici à nouveau la nécessité de compenser l'énergie dissipée par l'amortissement pour que le système s'auto-entretienne et indique les transformations que cela produirait au niveau du diagramme. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un portrait de phase le passage d'une spirale à un cercle, *i.e.* la modification du comportement de la solution en fonction de la valeur d'un paramètre (l'amortissement  $\alpha$  dans ce cas) et par conséquent le changement de stabilité correspond à ce que Poincaré [55, p. 261] avait appelé une *bifurcation*. Blondel précise alors :

« Pour qu'il y ait stabilité, il est nécessaire que le phénomène d'entretien donne au système oscillant un amortissement très petit, mais légèrement positif, c'est-à-dire que  $-\alpha$  soit remplacé par  $+\alpha$  et la spirale  $Amq$  de rayon décroissant est remplacée par une autre spirale logarithmique  $Am'n'p'$ . Les oscillations seront alors du type divergent et l'amplitude croîtrait indéfiniment si rien n'intervenait pour la limiter. Mais, en général, il y a toujours dans des phénomènes de ce genre une action limitatrice consistant, soit dans une diminution de l'énergie motrice, soit dans un accroissement de la résistance passive, c'est-à-dire de l'énergie dégradée quand augmente l'amplitude. La spirale logarithmique se trouve ainsi limitée d'elle-même à un troisième cercle  $C'''$  dont elle ne peut sortir. » [19, p. 154]



S'il semble que la description de Blondel pour ces « cercles dont on ne peut sortir » ressemble beaucoup à celle de Poincaré on ne peut cependant pas les qualifier de « cycles limites ». Pour s'en convaincre il suffit de se reporter à la *Notice sur les Travaux scientifiques d'Henri Poincaré* faite par lui-même en 1886 et dans laquelle il définissait ainsi ce concept :

« [...] il y a un autre genre de courbes fermées qui jouent un rôle capital dans cette théorie : ce sont les *cycles limites*. J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n'est pas moins importante que la première. Supposons, en effet, que l'on ait tracé un cycle limite ; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu'il restera toujours à l'intérieur de ce cycle, ou toujours à l'extérieur. » [56, p. 30]

Il apparaît donc que deux conditions sont nécessaires pour recouvrir ce concept. La première est de tendre asymptotiquement vers ces cycles limites et la seconde de ne jamais les franchir. Malheureusement, la description de Blondel ne satisfait qu'à la dernière de ces deux conditions et il semble avoir laissé de côté l'aspect attractif de ces cycles.

Blondel considère ensuite le cas des oscillations entretenues par une lampe à trois électrodes qu'il décrit au moyen du même type de représentation graphique (voir Fig. 9). Il explique alors à partir de la figure le phénomène :

« Le système est auto-amorant. L'extrémité du rayon vecteur  $\rho$  décrit ainsi une spirale logarithmique centrifuge. Arrivé en  $M_1$  au voisinage du maximum de l'amplitude de l'oscillation, le régime est troublé pendant un instant dans l'angle  $M_1OM_2$ , il devient amorti ( $\alpha < 0$ ) à cause de la courbure des caractéristiques de la lampe qui correspond à un accroissement de la résistance intérieure de celle-ci ; le vecteur  $\rho$  est diminué d'après une loi compliquée. Supposons qu'en  $M_2$  le régime soit de nouveau entretenu ; à partir de ce point,  $\rho$  décrit une nouvelle portion de spirale logarithmique centrifuge ( $\alpha > 0$ ). En résumé, l'amplitude tend constamment à croître, mais subit des freinages périodiques à la fin de chaque alternance. La condition de stabilité autour du cercle C exige que les impulsions  $\Delta\rho$  périodiques soient négatives et que leur valeur absolue croisse quand  $\rho$  augmente. C'est

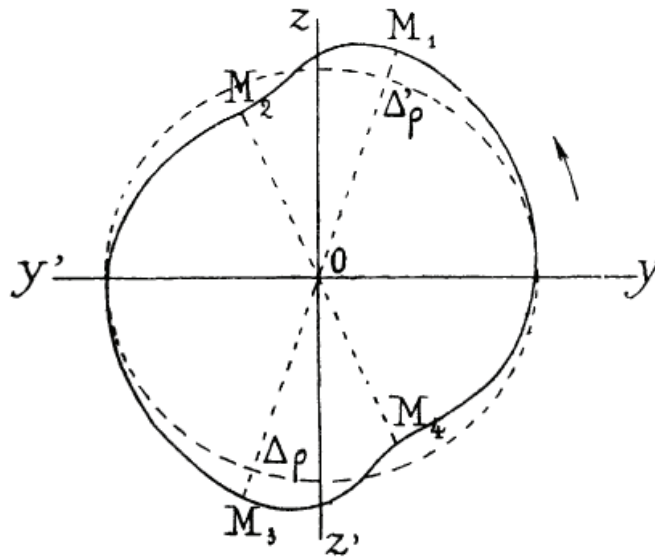


FIGURE 9. Oscillations entretenues par une lampe à trois électrodes, d'après Blondel [19, p. 157]

ainsi que fonctionnent les audions générateurs quand le diagramme est appliqué à représenter leurs vecteurs d'intensité du courant de plaque, car la résistance intérieure qui amortit le courant s'accroît quand on s'écarte des parties rectilignes des caractéristiques; le régime oscillatoire amorti peut être considéré comme recevant pendant un court instant une impulsion négative nécessaire pour amener l'oscillation du courant à sa valeur moyenne. » [19, p. 157]

Tout d'abord on peut remarquer qu'il est le premier à qualifier ce système « d'auto-amorant » ce qui peut s'entendre dans son acception par « auto-entretenu ». Cependant, même si le schéma ainsi que les explications qu'il fournit donnent à penser qu'il est en présence d'un cycle limite de Poincaré il ne fait pas le lien avec ses travaux.

Enfin, Blondel va décrire toujours avec le même type de représentation graphique les oscillations entretenues produites par l'arc musical de Duddell et l'arc strident intermittent qu'il avait découvert quinze ans auparavant.

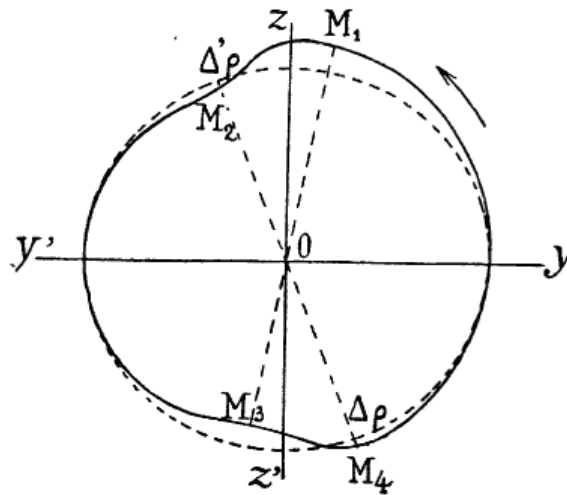


FIGURE 10. Oscillations entretenues par l'arc musical de Duddell, d'après Blondel [19, p. 160]

Blondel décrit en ces termes le phénomène :

« Les conditions de stabilité d'amplitude seront évidemment les suivantes : tant que l'amplitude  $\rho$  sera inférieure à sa valeur normale, l'impulsion positive, pendant le régime troublé accélérateur  $M_1M_2$ , devra être plus grande en valeur absolue que l'impulsion négative entre  $M_3$  et  $M_4$ ,  $\Delta\rho > (-\Delta'\rho)$ . Au contraire, lorsque l'amplitude, pour une cause quelconque, aura dépassé le cercle C, il faudra qu'elle tende à y revenir, ce qui se traduit par la condition  $(-\Delta'\rho) > \Delta\rho$ . » [19, p. 160]

Dans le cas de l'arc musical de Duddell il précise que l'amplitude devra tendre à revenir vers le cercle C qui constitue ainsi un « attracteur » pour l'amplitude et qui satisfait *de facto* une partie de la première condition de Poincaré. En effet, en étudiant la stabilité de l'amplitude des oscillations Blondel veut montrer qu'elle est bornée ce qui se traduit géométriquement par cette « tendance à revenir vers le cercle C ». Si Blondel a pu mettre en évidence le caractère attractif de ces « cercles dont on ne peut sortir » ou vers lesquels on a « tendance à revenir », recouvrant ainsi la seconde condition introduite par Poincaré pour définir le concept de « cycles limites », la première qui implique de tendre asymptotiquement vers ces cycles lui est inaccessible. Non pas pour des raisons théoriques mais plutôt à cause du point

de vue qu'il a choisi pour représenter le phénomène, *i.e.* celui d'une mise sous « forme normale complexe ». En effet, Blondel cherche à montrer géométriquement la stabilité de l'amplitude c'est pourquoi il choisit délibérément une condition initiale très proche du cercle dans le cas de la lampe à trois électrodes :

« Partons du point M qui correspond à une amplitude nulle de l'oscillation du courant du circuit de plaque. »  
[19, p. 157]

comme dans celui de l'arc musical de Duddell :

« Partant d'un point d'élongation nulle (courant nul). »  
[19, p. 169]

Ainsi, s'il a pu montrer qu'une condition initiale d'amplitude nulle ne s'éloignait pas du cercle C, il n'a pas envisagé le cas de conditions initiales d'amplitude non-nulle qui tendraient asymptotiquement à y revenir. Ses représentations constituent cependant bien des « cycles limites » de Poincaré même s'il ne les a pas identifiées comme tels.

## 6. MODÉLISATION DE LA CARACTÉRISTIQUE D'OSCILLATION

Comme l'avait souligné Poincaré [53], puis Janet [40], le principal obstacle à la mise en équation complète des oscillations observées dans la machine série-dynamo, l'arc chantant et la lampe à trois électrodes était la modélisation de la caractéristique d'oscillation du composant non-linéaire, analogue à une résistance négative, présent dans ces trois dispositifs.

### 6.1. Oscillations entretenues par une lampe à trois électrodes.

Dans une note publiée aux *C.R.A.S.* et présentée à l'Académie des Sciences le 17 novembre 1919, Blondel surmonte cette difficulté en modélisant la caractéristique d'oscillations de la lampe à trois électrodes. En appelant  $u$  la tension de la plaque à la variation  $i$  du courant de plaque de la lampe à trois électrodes,  $v$  le potentiel de grille et  $k$  le coefficient d'amplification de la lampe à trois électrodes il explicite la relation entre  $u$  et  $i$  dans la lampe à trois électrodes qui à la forme  $i = F(u + kv)$  et « dans laquelle  $F$  représente une fonction qui se traduit par une courbe connue présentant une très longue inflexion aux environs de la valeur moyenne du courant statique I (égale à environ la moitié du courant de saturation). » [21, p. 946]. Il fait alors l'hypothèse que l'on ne sort pas de la région où cette courbe conserve la même forme quel que soit  $v$  et se déplace seulement parallèlement à elle-même par une translation suivant l'axe des  $u$  quand on fait varier  $v$ . Ceci le

conduit à modéliser la caractéristique d'oscillation  $i = F(u + kv)$  de la lampe à trois électrodes en proposant « de la développer sous forme d'une série à termes impairs, qui sera sûrement convergente » [21, p. 946]. Il obtient ainsi :

$$i = F(u + kv) = b_1(u + kv) - b_3(u + kv)^3 - b_5(u + kv)^5 - \dots \quad (B_1)$$

Le but de cette note intitulée « Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs » est en fait de calculer une approximation de l'amplitude des oscillations. C'est pour cette raison que Blondel cherche à établir l'équation différentielle des oscillations de la lampe à trois électrodes. Aussi, en appelant  $i$  l'intensité du courant de plaque à l'instant  $t$ ,  $i_1$  et  $i_2$  les intensités dans les branches de self-induction  $L$  et de capacité  $C$ , ayant pour résistances internes  $r_1$  et  $r_2$  respectivement,  $u$  la tension oscillante aux bornes des circuits dérivés, il obtient les trois équations suivantes

$$i_1 + i_2 = i, \quad r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = u, \quad r_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = u, \quad h = \frac{kM}{L} - 1;$$

où  $M$  représente le coefficient d'induction mutuelle et où le potentiel de grille  $v \approx -\frac{M}{L}u$ . En les combinant et en les dérivant Blondel [21, p. 945] parvient à établir l'équation différentielle de la lampe à trois électrodes sous la forme :

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{r_2}{L} \frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{CL} - \frac{r_1 r_2}{L^2} \right) \frac{du}{dt} - \frac{r_1}{CL^2} u - r_2 \frac{d^3i}{dt^3} - \frac{1}{C} \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \quad (6)$$

La présence des résistances internes  $r_1$  et  $r_2$  que Blondel aurait pu négliger le conduit à cette équation différentielle du troisième ordre et du second degré. En substituant l'expression (B<sub>1</sub>) de l'intensité  $i$  dans cette équation (6) « l'équation finale du problème » [21, p. 947] prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} \frac{r_2}{L} + \frac{du}{dt} \left( \frac{1}{CL} - \frac{r_1 r_2}{L^2} \right) - \frac{r_1}{CL^2} u \\ & - \left( r_2 \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{d^2u}{dt^2} \right) \left[ b_1 \left( h - \frac{kMr_1}{L^2} u \right) - 3b_3 h^3 u^2 - \dots \right] \\ & - \left[ 3r_2 \frac{d^3u}{dt^3} \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right] \left[ -\frac{b_1 kMr_1}{L^2} - 6b_3 h^3 u + \dots \right] \\ & - r_2 \left( \frac{du}{dt} \right)^3 [-6b_3 h^3 - \dots] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

En négligeant les résistances internes  $r_1$  et  $r_2$ , *i.e.* en posant dans l'Eq. (12) :  $r_1 = r_2 = 0$ , on a :

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{du}{dt} \left( \frac{1}{CL} \right) + \frac{1}{C} \frac{d^2u}{dt^2} [b_1h - 3b_3h^3u^2 - \dots] - \frac{1}{C} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 [-6b_3h^3u + \dots] = 0$$

En regroupant les termes en  $b_3h^3$ , on obtient :

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{du}{dt} \left( \frac{1}{CL} \right) + \frac{1}{C} \frac{d^2u}{dt^2} (b_1h) - \frac{3b_3h^3}{C} \left[ \frac{d^2u}{dt^2} u^2 + \left( \frac{du}{dt} \right)^2 (2u) + \dots \right] = 0$$

En remarquant alors que le dernier terme s'écrit :

$$\left[ \frac{d^2u}{dt^2} u^2 + \left( \frac{du}{dt} \right)^2 (2u) + \dots \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} u^2 \right) + \dots$$

En intégrant une fois par rapport au temps, l'Eq. (12) devient :

$$C \frac{d^2u}{dt^2} - (b_1h - 3b_3h^3u^2 - \dots) \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0 \quad (\text{B}_2)$$

En développant dans l'équation (12) la tension  $u$  en série de Fourier et en identifiant terme à terme, Blondel déduit une première approximation de la période plus exactement de la fréquence angulaire ou pulsation  $\omega$  des oscillations :

$$\omega^2 \approx \frac{1}{CL} \left( 1 + \frac{r_2}{\rho} h_0 - r_1 r_2 \frac{C}{L} \right) \text{ avec } h_0 = \rho C \frac{r_1 + r_2}{L} \quad (15)$$

Si l'on néglige à nouveau les résistances internes  $r_1$  et  $r_2$  cette expression se réduit à :

$$\omega^2 \approx \frac{1}{CL} \quad (\text{B}_3)$$

Il est important de remarquer que Blondel retrouve la formule de Thomson en première approximation. Avec la même technique, il obtient une première approximation de l'amplitude  $A_1$  des oscillations :

$$A_1 \approx \frac{2}{h} \sqrt{\frac{-b_1 + \frac{r_1 + r_2}{hL} C}{-3b_3}} \quad (16)$$

En négligeant encore les résistances internes  $r_1$  et  $r_2$  cette expression se réduit à :

$$A_1 \approx \frac{1}{h} \sqrt{\frac{4b_1}{3b_3}} \quad (\text{B}_4)$$

Au mois de juin de l'année suivante, Blondel [23] va exposer ces résultats dans un article plus long et plus détaillé, publié dans la revue *Radioélectricité*.

## 6.2. Oscillations entretenues par un arc chantant (I).

Entré à dix-huit ans à l'École Polytechnique, Pomey (1861-1943) intègre ensuite l'École Supérieure des Postes et Télégraphes.

Il est promu Ingénieur des Télégraphes en 1883 et remplit cette fonction à Clermont-Ferrand, au Mans, à Nice, à Tours et à Châlons-sur-Marne. Il passe ensuite une licence en droit puis une licence ès sciences. En 1893, il est nommé professeur d'électricité théorique à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes « concurremment » avec Poincaré.

Il y enseignera pendant trente années durant lesquelles ses cours seront régulièrement publiés (Voir Pomey [58, 59, 60]) ainsi que les conférences qu'il réalisa au sein de cette École dont il deviendra directeur de 1924 à 1926 avant de prendre sa retraite en 1927.

Durant la première guerre mondiale, il est nommé Chef du service Télégraphique de la place de Toul puis de celui de l'Armée d'Orient. Il est alors l'Adjoint du Directeur du Service de la Radiotélégraphie militaire : le Colonel Gustave Ferrié. Au sortir du conflit il reprend ses activités et ses publications. Le 28 juin 1920 paraît son ouvrage intitulé : « Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie<sup>29</sup> » [57] préfacé par André Blondel. Le chapitre XIX consacré à la « Génération des oscillations entretenues » débute ainsi :

« Pour que les oscillations entretenues subsistent dans un système, il faut qu'elles correspondent à un régime stable ne dépendant que de l'état du système ou de ses variations périodiques, mais invariable quand on ne change que dans certaines limites les conditions initiales qui y ont donné naissance. Il en résulte que le régime périodique permanent se présente comme une solution asymptotique pour  $t$  infini. » [57, p. 373]

Il est intéressant de comparer cette phrase d'une part avec la *condition de stabilité* énoncée en mai-juin 1908 par Henri Poincaré [53, p.

---

29. La date exacte de la parution a été précisée par Madame Christine Robert (Administrateur du Prêt Interbibliothèques de la Bibliothèque Nationale de France) en consultant l'ouvrage : la Bibliographie de la France, volume année 1920, journal de la librairie.

391] (voir p. 9) dans ses conférences données à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes et, d'autre part avec cette phrase qu'Aleksandr Andronov (1901-1952) écrira moins de dix ans plus tard dans sa célèbre note aux *Comptes Rendus*<sup>30</sup> :

« Il est donc clair que la période et l'amplitude des oscillations stationnaires ne dépendent pas des conditions initiales. » [3, p. 560]

Il apparaît alors que cette propriété caractéristique des solutions périodiques de type *cycle limite* qui consiste à se démarquer des solutions de type *centre* par leur indépendance vis-à-vis des conditions initiales était déjà connue et reconnue à cette époque. Pomey rappelle ensuite certains fondements de la théorie des équations différentielles linéaires avant d'aborder l'étude des *oscillations entretenues*. Il explique :

« Pour que des oscillations soient engendrées spontanément et s'entretiennent, il ne suffit pas que l'on ait un mouvement périodique, il faut encore que ce mouvement soit stable. » [57, p. 375]

De nouveau, Pomey souligne l'importance d'un régime *stable* d'oscillations et prend, pour illustrer son propos, l'exemple de l'oscillateur harmonique (pendule simple) qui possède une solution de type *centre* dépendante des conditions initiales. Il démontre que dans ce cas : « on a un régime périodique accidentel, non un régime périodique stable » [57, p. 376]. Il aborde au §9 l'étude d'*équations non linéaires* et présente deux exemples pour lesquels la force élastique (force de Hooke) n'est plus proportionnelle à l'élongation mais s'exprime comme une fonction non linéaire (quadratique puis cubique) de l'élongation. Il fait alors appel à une technique de développement en série de Fourier, qui n'est pas sans rappeler celle utilisée par Blondel [21], pour expliciter les premiers termes de la solution. Il s'intéresse ensuite au problème de la *génération des oscillations spontanées* et décrit au paragraphe §11 un cas particulier qu'il attribue à Lord Rayleigh et Abraham<sup>31</sup>. Pomey propose d'établir l'équation différentielle caractérisant les oscillations entretenues par un arc chantant alimenté par une force électromotrice constante continue. Il écrit :

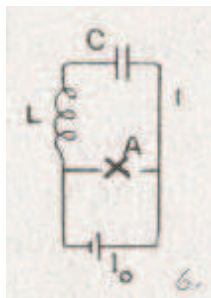
---

30. Andronov [2] avait déjà présenté ce résultat lors du VI<sup>e</sup> congrès des physiciens russes qui eut lieu à Moscou entre le 5 et 16 août 1928.

31. Il semble faire référence d'une part à l'article de Rayleigh [61] et, d'autre part aux travaux d'Abraham et Bloch concernant le *multivibrateur* [1].



« Supposons, par exemple, qu'un arc  $A$ , aux bornes duquel est branché un circuit oscillant, soit alimenté à courant constant.



Soit  $E$  la différence de potentiel aux bornes de l'arc, et supposons que cette différence de potentiel dépende du courant oscillant  $i$  d'après la loi

$$E = E_0 + ai - bi^3 \quad (\text{P}_1)$$

L'équation relative du circuit oscillant est, d'autre part,

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E \quad (\text{P}_2)$$

$q$  étant la charge du condensateur à l'époque  $t$ , quantité dont  $i$  est la dérivée par rapport au temps. »

[57, p. 380]

Ainsi, dès la fin du mois de juin 1920, Pomey envisageait déjà de représenter la *caractéristique d'oscillation* de l'arc chantant, dispositif parfaitement analogue à la lampe à trois électrodes d'après Janet [40], par une fonction cubique. Trois semaines plus tard, Van der Pol [65] employait ce même type de modélisation pour établir l'équation différentielle des oscillations entretenues par une triode. Dans le même paragraphe, Pomey établissait ainsi l'équation différentielle des oscillations entretenues par un arc chantant.

« Des équations (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) on déduit, abstraction faite de la constante  $CE_0$ ,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (R - a) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = -b \left( \frac{dq}{dt} \right)^3 \quad (\text{P}_3).$$

Considérons donc, à titre d'exemple d'équation non linéaire, l'équation

$$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = E_0 + ax' - bx'^3. \quad (\text{P}_4).$$

Posons

$$x - CE_0 = y, \quad R - a = \alpha$$

et remarquons que si l'on fait  $R = a$ ,  $b = 0$ , l'équation a pour solution

$$y = A \sin(mt), \quad m = \frac{1}{\sqrt{CL}}. \gg [57, \text{p. 380}]$$

En comparant l'équation différentielle (P<sub>4</sub>) avec l'Eq. (HP<sub>1</sub>) (voir p. 8) qu'avait établie Henri Poincaré [53, p. 390] lors des conférences qu'il avait réalisées en mai-juin 1908 et auxquelles il est possible que Pomey ait assisté<sup>32</sup>, on constate qu'elles sont absolument identiques. Plus extraordinaire encore, Pomey va expliciter les deux premiers termes de la solution de l'équation (P<sub>4</sub>) en faisant de nouveau appel à un développement en série de Fourier :

« On a donc approximativement

$$x - CE_0 = \sqrt{\frac{4(a-R)}{3bm^2}} \sin(mt) + B \cos(3mt) + \dots (\text{P}_4).$$

On voit donc qu'il y a une solution périodique indépendante des conditions initiales, qui est une fonction périodique. » [57, p. 381]

Cette dernière citation implique plusieurs remarques. En tout premier lieu, on constate que Pomey établit de nouveau l'indépendance de la solution périodique vis-à-vis des conditions initiales (voir Andronov [2, 3]). En second lieu, qu'il fournit les deux premiers termes du développement en série de la solution périodique. Enfin, qu'en faisant abstraction de la résistance  $R$ , la valeur de l'amplitude de ces oscillations  $\sqrt{\frac{4(a-R)}{3bm^2}}$  est équivalente à celle obtenue par Blondel (B<sub>4</sub>) pour la lampe à trois électrodes.

### 6.3. Oscillations entretenues par une triode.

En 1916, après des études de physique et de mathématiques à l'université d'Utrecht, Balthazar Van der Pol (1889-1959) partit étudier avec John Ambrose Fleming (1849-1945), ingénieur électricien anglais qui

---

32. Il était présent lors des ultimes conférences de Poincaré [54] en juillet 1912.

était professeur à l'University College de Londres. Fleming était alors le premier professeur d'électrotechnique de cet établissement d'enseignement supérieur, mais il était surtout connu comme l'inventeur de la diode, c'est-à-dire, la première valve thermionique, en 1904. Après une année avec Fleming, Van der Pol part travailler avec John Joseph Thomson (1856-1940) au laboratoire Cavendish de Cambridge. En 1920 il retourna en Hollande pour terminer son doctorat en physique à l'université d'Utrecht aux côtés de Hendrik Lorentz (1853-1928). Sa thèse porte sur « L'influence d'un gaz ionisé sur la propagation des ondes électromagnétiques : application à la télégraphie sans fil et aux mesures du rayonnement ultra-violet ».

Ainsi, dès le début des années vingt, Van der Pol s'intéresse à la production d'ondes électromagnétiques au moyen de circuits électriques oscillants comportant une triode en lieu et place d'un arc chantant. Cependant, ce n'est pas dans sa célèbre contribution « On relaxation-Oscillations » [67] mais dans un article antérieur, dont il achève<sup>33</sup> la rédaction le 17 juillet 1920 et qui est publié en novembre et décembre de la même année, que Van der Pol modélise la caractéristique d'oscillation d'une triode au moyen d'une fonction cubique et qu'il établit son équation différentielle, un an après Blondel [21]. Pour y parvenir, il effectue un développement en série de Taylor-McLaurin de la force électromotrice  $\psi(kv)$  de la triode limité au trois premiers termes :

$$i = \psi(kv) = -\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 \quad (V_1)$$

Van der Pol ajoute que, par des considérations de symétrie de la caractéristique d'oscillation, cette expression peut être réduite en posant :  $\beta = 0$ . Deux ans plus tard, pour rendre compte du phénomène d'hystérésis d'oscillation de la triode, Appleton et Van der Pol [7, p. 182] seront contraints de développer la fonction  $\psi(kv)$  jusqu'à l'ordre cinq, exactement comme l'avait fait Blondel [21, p. 946]. Il exprime alors la tension aux bornes de chaque dipôle :

$$L \frac{di_1}{dt} = Ri_3 = \frac{1}{C} \int i_2 dt = E_a - v_a$$

et parvient à établir l'équation différentielle suivante pour la triode :

$$\frac{di}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0$$

---

33. La note de bas de page dans laquelle Van der Pol [65, p. 702] fait référence à un article de W. E. Eccles publié en novembre 1919 qui semble indiquer qu'il n'a commencé la rédaction qu'après cette date.

En substituant l'expression (V<sub>1</sub>) de l'intensité  $i$  dans cette équation on a :

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \left( \frac{1}{R} - \alpha \right) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v + \beta \frac{d(v^2)}{dt} + \gamma \frac{d(v^3)}{dt} = 0$$

En posant  $\beta = 0$  et en faisant abstraction de la résistance  $R$ , ce qui équivaut à  $R \rightarrow \infty$ , cette équation devient :

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} - (\alpha - 3\gamma v^2) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (V_2)$$

Pour le calcul de l'amplitude il propose trois méthodes. La première, « analytique », comme l'explique Van der Pol [65, p. 704] consiste en un développement en perturbations singulières utilisé par les astronomes. La seconde, faisant appel au développement en série de Fourier utilisé par Blondel [21] et Pomey [57] était plutôt employée par les ingénieurs et le conduit à introduire une première correction pour la valeur de la période plus exactement de la fréquence angulaire ou pulsation  $\omega$  :

$$\omega^2 \approx \frac{1}{CL} - \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{a^2 \beta^2}{3C^2}$$

Mais puisque pour des raisons de symétrie  $\beta = 0$ , Van der Pol [65, p. 705] obtient alors :

$$\omega^2 \approx \frac{1}{CL} \quad (V_3)$$

Il est important de souligner que Van der Pol retrouve, comme Blondel, la formule de Thomson en première approximation. La troisième méthode de calcul de l'amplitude est « géométrique » et lui permet comme les deux précédentes d'aboutir à l'expression suivante :

$$a = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\alpha - \frac{1}{R}}{\gamma}}$$

En faisant de nouveau abstraction de la résistance  $R$  on a finalement :

$$a = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\alpha}{\gamma}} \quad (V_4)$$

Il est facile de montrer, comme le fera d'ailleurs Pomey [60, p. 259] que la représentation de la caractéristique d'oscillation proposée par

Blondel [21, p. 946] peut se ramener à celle de Van der Pol [65, p. 703]. En effet, en écrivant l'Eq. (B<sub>1</sub>) ainsi :

$$i = F(u + kv) = b_1 \left(1 + k\frac{v}{u}\right) u - b_3 \left(1 + k\frac{v}{u}\right)^3 u^3 + \dots$$

et, en utilisant le fait que le potentiel de grille  $v \approx -\frac{M}{L}u$  on a :

$$i = b_1 \left(1 - \frac{kM}{L}\right) u - b_3 \left(1 - \frac{kM}{L}\right)^3 u^3 + \dots = Au + Bu^3 + \dots$$

Ainsi, il apparaît clairement que, moyennant les simplifications effectuées, les équations (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>, V<sub>4</sub>) de Van der Pol [65] et (B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>, B<sub>4</sub>) de Blondel [21] sont totalement identiques au signe près du sens arbitrairement choisi pour le courant. On remarque également que la modélisation proposée par Van der Pol pour la caractéristique d'oscillation de la triode est exactement la même que celles initialement introduites par Blondel puis Pomey pour la lampe à trois électrodes et l'arc chantant.

#### 6.4. Oscillations entretenues par l'arc chantant (II).

En 1926, Blondel [26] publie aux *Comptes-Rendus* une note intitulée : « Contribution à la théorie de l'arc chantant musical » dans laquelle il établit l'équation différentielle caractérisant les oscillations du dispositif imaginé par Duddell [33, 34] en reprenant la modélisation employée par Pomey [57, p. 380] sans pour autant faire référence à ses travaux. Blondel s'intéresse tout d'abord à la *courbure de la caractéristique* d'oscillation et écrit :

« Cette caractéristique ayant dans sa zone d'utilisation une forme parabolique, nous écrivons l'expression de la tension aux bornes  $u$ , en fonction du courant dans l'arc  $i$  sous la forme

$$u = -hi + pi^2 + qi^3 + \dots$$

Nous nous bornerons aux trois premiers termes de la série, parce que les termes au-delà du premier n'ont qu'une importance relativement faible. Le premier terme représente la résistance négative apparente de l'arc, le second tient compte de la courbure parabolique ; il est nécessaire d'ajouter le troisième pour caractériser la dissymétrie de cette courbure par rapport à la verticale passant par le régime moyen. » [26, p. 900]

Revenant ensuite sur la notion de *caractéristique dynamique* que Blondel [14, 15, 16] avait introduite en 1905, il ajoute :

« On sait que la caractéristique dynamique se transforme pendant les oscillations en une courbe fermée de forme analogue à une ellipse allongée. » [26, p. 900]

Puis, il considère que l'effet de retard de l'arc (décalage entre la tension et l'intensité) peut être représenté par un terme analogue à celui qui transcrit l'effet d'une capacité et qu'il écrit :

$$-\frac{1}{s} \int idt$$

où  $s$  désigne un coefficient ayant les dimensions d'une capacité. Tenant compte de ce « retard » il écrit la différence de potentiel aux bornes de l'arc ainsi :

$$u = -hi + pi^2 + qi^3 + \dots - \frac{1}{s} \int idt$$

Il rappelle ensuite l'« équation classique<sup>34</sup> » du courant oscillant qui traverse l'arc :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u$$

En différentiant par rapport au temps et en remplaçant  $u$  par l'expression ci-dessus, il obtient :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R - h + 2pi + 3qi^2)\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{s}\right)i. \quad (\text{B}_5)$$

En développant dans l'équation (B<sub>5</sub>) l'intensité  $i$  en série de Fourier et en identifiant terme à terme, il retrouve l'expression de l'approximation d'ordre un de l'amplitude (B<sub>4</sub>) qu'il avait obtenue quelques années auparavant ainsi que celle calculée par Pomey [57, p. 381]. Il poursuit les calculs et extrait les approximations d'ordre deux et trois de l'amplitude.

L'équation (B<sub>5</sub>) établie par Blondel dans cette note qui fut exposée le 29 mars 1926 devant les membres de l'Académie des Sciences est en tous points similaire (hors mis le fait qu'elle ne soit pas dédimensionnée) à celle qu'avait présenté Van der Pol exactement deux jours auparavant lors d'une conférence exposée le 27 mars 1926 devant la *Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging*<sup>35</sup> et intitulée « Over Relaxatietrillingen<sup>36</sup> ».

## 7. SUR LES OSCILLATIONS DE RELAXATION

Au milieu des années 1920, Van der Pol éprouve, de la même manière que Blondel [19], la nécessité de clarifier les différents types d'oscillations. Cependant, ce n'est pas sa célèbre publication « On Relaxation-Oscillations » que Van der Pol introduit ce concept mais dans un court mémoire publié en néerlandais le 19 novembre 1925 [66]. De plus, il est important de remarquer qu'il existe au moins quatre versions différentes de l'article intitulé « On Relaxation-Oscillations » : deux en néerlandais, une en allemand et la dernière en anglais rédigées dans l'ordre chronologique suivant :

---

34. D'après Zenneck [70, p. 90] cette équation avait été établie par Gustav Kirchhoff (1824-1887) et Lord Kelvin (William Thomson (1824-1907)).

35. Société Néerlandaise de Physique.

36. « Sur les oscillations de relaxation ».

- Over Relaxatietrillingen, *Physica*<sup>37</sup>, 6, p. 154-157,
- Over Relaxatie-trillingen, *Tijdschr. Ned. Radiogenoot.* 3, p. 25-40,
- Über Relaxationsschwingungen, *Jb. Drahtl. Telegr.* 28, p. 178-184,
- On relaxation-oscillations, *Philosophical Magazine*, 7, 2 p. 978-992.

### 7.1. La généralité de l'équation de Van der Pol.

Dans ses publications sur les oscillations de relaxation, Van der Pol présente une équation différentielle qui n'est plus rattachée à la triode, ni à aucun autre dispositif (machine série-dynamo ou arc chantant). Avec une démarche très pédagogique qui n'est pas sans rappeler celle de Pomey [57, p. 77] il présente l'équation de l'oscillateur amorti et le concept de « résistance négative » en considérant que si le signe du coefficient de frottements  $\alpha$  est inversé, ce qui se produit notamment dans la machine série-dynamo, l'arc chantant et la triode, alors l'amplitude des oscillations augmente indéfiniment ce qui est physiquement irréalisable. Il explique ensuite que pour limiter l'amplitude on doit supposer que le coefficient de frottements est une fonction de l'amplitude. Il propose donc de remplacer  $\alpha$  par l'expression  $\alpha - 3\gamma x^2$  (où  $\gamma$  est une constante) dans l'équation de l'oscillateur amorti<sup>38</sup>. Il obtient l'équation suivante :

$$\ddot{x} - (\alpha - 3\gamma x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Contrairement aux apparences, cette équation n'est pas sans dimensions et correspond à l'équation (V<sub>2</sub>) représentant les oscillations d'une triode précédemment établie par Van der Pol [65]. La variable  $x$  a donc la dimension d'une différence de potentiel (tension de plaque de la triode). Sous cette forme l'équation possède trois paramètres :  $\alpha$  la « résistance négative »,  $\omega$  la fréquence angulaire ou pulsation définie par (V<sub>3</sub>) et  $\gamma$  une constante. Van der Pol fait alors appel à une technique introduite par Pierre Curie [30] sans cependant y faire référence. Il obtient ainsi une équation différentielle sans dimensions et qui ne

---

37. La revue *Physica : Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* fut créée en 1921 à l'initiative d'Adriaan Fokker, d'Ekko Oosterhuis et de Balthazar Van der Pol. Après une restructuration en 1934 cette revue a été rachetée par la société *Elsevier* en 1970 pour prendre la forme connue aujourd'hui sous le nom de *Physica*.

38. Ce type de modélisation au moyen d'une fonction cubique avait déjà été envisagée en 1883 par Lord Rayleigh [61, p. 230].



dépend plus désormais que d'un seul paramètre :

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0 \quad (V_5)$$

Cette forme réduite ( $V_5$ ) est appelée « équation de Van der Pol<sup>39</sup> ».

## 7.2. L'intégration graphique et les oscillations de relaxation.

Très tôt, Van der Pol avait pris conscience du caractère non-intégrable de l'équation ( $V_5$ ) qu'il rappelle ici au tout début de son article :

« It has not been found possible to obtain an approximate analytical solution for ( $V_5$ ) with the supplementing condition ( $\varepsilon \gg 1$ ), but a graphical solution may be found in the following way. » [67, p. 982]

L'intégration graphique de l'équation ( $V_5$ ) va conduire Van der Pol [1926c, p. 987] à établir que la période des oscillations dans le troisième cas, *i.e.* pour  $\varepsilon = 10$  devient approximativement égale à  $\varepsilon$ .

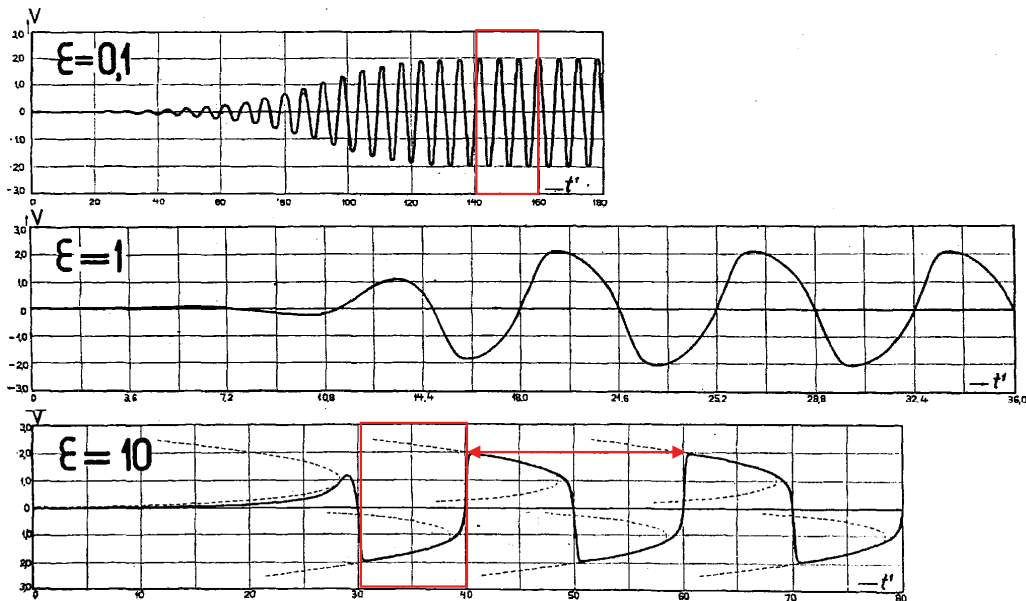


FIGURE 11. Intégration graphique de l'équation ( $V_5$ ), d'après Van der Pol [67, p. 986].

39. Une correspondance biunivoque entre cette équation et celle établie par Lord Rayleigh [61] a été mise en évidence par Le Corbeiller [45, p. 723]. Voir Ginoux [37].

Sur la première courbe ( $\varepsilon = 0.1$ ) on dénombre, dans la partie encadrée en rouge, trois périodes un quart pour vingt graduations temporelles. Ce qui fournit une période  $T$  approximativement égale à  $2\pi$  comme l'affirme Van der Pol [67, p. 987].

La seconde courbe ( $\varepsilon = 1$ ) permet de mettre en lumière « une déviation assez sensible de la forme sinusodale. » [69, p. 17]. Elle montre la transition continue entre les oscillations sinusodales ( $\varepsilon \ll 1$ ) et les oscillations de relaxation ( $\varepsilon \gg 1$ ).

Dans la partie encadrée en rouge de la troisième courbe ( $\varepsilon = 10$ ) on constate que « la courbe commence à s'élever exponentiellement, et au bout d'une durée égale à une période, a déjà pratiquement atteint sa forme périodique limite. » [69, p. 18]. Ainsi, il en déduit que pour  $\varepsilon \gg 1$  la valeur de la période est approximativement égale à  $\varepsilon$ . Mais, puisque  $\varepsilon$  est un paramètre sans dimension il lui faut donc exprimer la période dans un système d'unités temporelles. En appliquant la formule de changement de variable,  $t' = \omega t$  la période s'écrit :

$$T = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

En tenant compte du fait qu'il a posé :  $\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega}$ ,  $\alpha = \frac{R}{L}$  et  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$  il obtient finalement :

$$T = \frac{\alpha}{\omega^2} = RC \tag{V_6}$$

Il démontre ainsi que pour des valeurs de  $\varepsilon \gg 1$  la période des oscillations est approximativement <sup>40</sup> égale au « temps de relaxation » correspondant à la durée de décharge d'un condensateur dans une résistance et propose alors d'appeler ce phénomène « oscillations de relaxation ». Van der Pol rappelle ensuite que cette idée lui a été suggérée par la lecture d'un article d'Abraham et Bloch [1] dans lequel ils décrivent le fonctionnement du *multivibrateur*, siège d'oscillations dont la période est « de l'ordre de  $C_1R_1 + C_2R_2$  ». Van der Pol explique :

« In their original description of the system Abraham & Bloch draw attention to the fact that the time period of the oscillations produced by the multivibrator is approximately equal to the product  $RC$ , but, so, as far as I am aware, no theoretical discussion of the way in which

---

<sup>40</sup>. Néanmoins, il sera établi ensuite par Liénard [46, p. 952] que la période vaut en réalité le double soit  $2\varepsilon$  comme il est facile de le vérifier sur la Fig. 11.

the oscillations are *maintained* has been published. »  
[67, p. 988]

Ceci paraît confirmer que ce sont bien les travaux d'Abraham et Bloch qui ont conduit Van der Pol à expliciter la période d'oscillations de la triode comme le produit  $RC$ . De plus, il semble que ce soit également leur description du phénomène, de charge « brusque » et de décharge « lente », qui l'ait incité à donner à ces oscillations qu'il qualifiait encore quelques années auparavant de *maintained* le nom d'oscillations de relaxation<sup>41</sup>.

Ainsi, le grand mérite de Van der Pol est d'avoir d'une part mis en lumière le caractère « lent-rapide » de ces oscillations et, d'autre part d'avoir démontré que d'autres dispositifs sont régis par l'équation dédimensionnée ( $V_5$ ) et sont donc le siège d'oscillations de relaxation. L'ingénieur Philippe Le Corbeiller (1891-1980) qui assista Van der Pol lors de ses conférences à Paris de 1928 à 1930 et qui participa grandement à la diffusion en France du concept d'oscillations de relaxation rappelait lors de son exposé au Conservatoire des Arts et Métiers l'importance de la contribution de Van der Pol en ces termes :

« *Cas de  $\varepsilon$  très grand.* – Ici la courbe des oscillations a visiblement un très grand nombre d'harmoniques ; en langage mathématique, la série de Fourier correspondante converge très lentement. Il est donc absolument illusoire dans ce cas de calculer plus ou moins péniblement les un, deux ou trois premiers termes de la série. Un des apports les plus consistants de M. van der Pol a consisté à reconnaître clairement ce fait, à donner *un nom* à ces oscillations non sinusodales, et à en faire un outil de la recherche physique, au même titre que les oscillations sinusodales dont elles constituent en fait la contrepartie. » [44, p. 22]

---

41. Dans son analyse de l'article de Van der Pol [67], l'ingénieur Pierre David (1897-1987) proposait de traduire cette terminologie par « oscillations par décharge » [31] qui n'est pas sans rappeler l'analogie avec la décharge fractionnée de Gaugain mise en évidence par Blondel [14, 15].

## 8. LA CORRESPONDANCE BLONDEL-CARTAN

Une lettre adressée par André Blondel au mathématicien Élie Cartan vient récemment d'être découverte<sup>42</sup>. Dans ce courrier daté du 8 avril 1931, Blondel remercie tout d'abord Cartan pour les tirés à part de son article [29] puis rend hommage aux « grands mathématiciens » qu'il considère comme « les maîtres de la science » susceptibles d'apporter des solutions aux problèmes posés par d'autres sciences comme la Mécanique ou la Physique. Il écrit :

« Vous venez d'en donner un nouvel exemple par votre intervention dans la théorie des oscillations de relaxation (que j'ai apprise il y a 12 ans "oscillations de 2ème espèce") et dans la question si épineuse de la relativité généralisée, grâce à vous Einstein a trouvé en France à qui parler ; c'est un grand soulagement pour nous en même temps qu'une véritable satisfaction pour tous ceux qui souhaitent la mise au point définitive de cette branche si complexe de nos connaissances. »

Dans la première phrase, Blondel rappelle que douze ans auparavant il avait mis en évidence un nouveau type d'oscillations qu'il avait alors qualifié de « seconde espèce ». En effet, dans cet article Blondel [19] avait défini dans le second type (2.) des « oscillations persistantes par écoulement fractionné ». Il avait ensuite illustré ce type d'oscillations à partir de « l'arc de seconde espèce ou arc sifflant » qu'il avait découvert en 1905 (voir Blondel [14, 15, 16]).

Sur la Fig. 12 ont été représentées les oscillogrammes, c'est-à-dire, les séries temporelles de l'évolution de la solution périodique correspondant d'une part au phénomène d'*oscillations de relaxation* mis en évidence par Van der Pol [66, 67] (partie supérieure) et, d'autre part au *second type discontinu* d'oscillations découvert par Blondel [14, 15, 16] (partie inférieure<sup>43</sup>). On constate une parfaite analogie dans la forme de ces oscillations que Van der Pol ne tardera pas à faire remarquer.

En effet, le 11 mars 1930, lors de sa seconde conférence à l'École Supérieure d'Électricité, Van der Pol [69] reprenait son énumération des différents dispositifs sièges d'*oscillations de relaxation* :

« Dans le domaine électrique nous avons de très jolis exemples d'oscillations de relaxation dont certains

---

42. Ce document m'a été aimablement transmis par M. Scott Walter.

43. La Fig. 4 (voir p. 11) a été déformée afin de permettre une comparaison.



FIGURE 12. Oscillations de relaxation dans l'arc sifflant, d'après Van der Pol [67, p. 986] et Blondel [15, p. 78].

sont très anciens, telles que la décharge par étincelle d'une machine à plateaux, l'oscillation de l'arc électrique étudiée par M. BLONDEL, dans un mémoire célèbre <sup>(1)</sup> ou l'expérience de M. JANET, et d'autres plus récentes telles que le multivibrateur d'ABRAHAM et BLOCH <sup>(2)</sup> qui consiste en un amplificateur à couplage capacité et résistance à deux étages, dont les bornes de sortie sont connectées aux bornes d'entrée.

<sup>(1)</sup> BLONDEL, *Eclair. Elec.*, **44**, 41, 81, 1905. V. aussi *J. de Phys.*, **8**, 153, 1919.

<sup>(2)</sup> ABRAHAM et BLOCH, *Ann. de Phys.*, **12**, 237, 1919. >

[69, p. 20]

C'est durant cet exposé (auquel a peut-être assisté Blondel) que Van der Pol faisait la seule et unique référence aux travaux de Blondel [14, 15, 16] concernant l'arc électrique. Il est important de remarquer que moins d'un an s'est écoulé entre la conférence de Van der Pol et la lettre de Blondel.

## 9. CONCLUSION

Au regard de ce qui vient d'être exposé il apparaît que dans une série d'articles « Sur les phénomènes de l'arc chantant » de 1905, Blondel [14, 15, 16] a mis en évidence dans l'*arc sifflant* ce qu'il nomme un *second type discontinu* d'oscillations et qui s'avère être des *oscillations de relaxation*. Pour expliquer ce phénomène il propose de représenter son évolution dans le *plan de phase* et montre que les trajectoires prennent alors l'allure de petits cycles. Cependant, la non reproductibilité des expériences à l'identique du fait de la grande variabilité des différents éléments constitutifs de l'arc chantant (diamètre, écart et nature des charbons de l'arc) rendait alors impossible de vérifier le caractère attractif de ces cycles.

Le développement considérable que connut la lampe à trois électrodes pendant le premier conflit mondial conduit Blondel à transposer les résultats qu'il avait obtenus pour l'arc chantant à ce nouveau dispositif. Plus fiable et moins instable, la triode allait ainsi faciliter l'étude des oscillations entretenues. En avril 1919, Blondel [19] publie un long mémoire dans lequel il propose une nouvelle classification des oscillations et introduit la terminologie *oscillations auto-entretenues*. Après avoir donné une définition de ce concept qui sera ensuite reprise par Andronov [3] par Van der Pol [69] et par Le Corbeiller [44], Blondel emploie un diagramme permettant de représenter l'amplitude des oscillations pour illustrer les oscillations (*auto*)-*entretenues* par une lampe à trois à électrodes et par un arc chantant. Si les figures qu'il obtient semblent parfaitement correspondre aux cycle limites de Poincaré [49, p. 261] il ne fait cependant aucun lien avec les travaux de « l'illustre géomètre » qu'il semble portant bien connaître. De plus, alors que les « cycles de Blondel » permettent d'expliquer le mécanisme de l'entretien par la présence dans chacun de ces dispositifs d'un composant à caractéristique d'oscillation non linéaire, c'est-à-dire, pour lequel la valeur de la résistance peut pendant un certain laps de temps devenir négative, ils ne fournissent en revanche aucune indication concernant la forme des oscillations que Janet puis Blondel considèrent désormais comme non-sinusodales. En effet, il faudra attendre les travaux de Van der Pol [67] pour que l'on s'intéresse à la nature intrinsèque de ces oscillations auxquelles il donnera le nom d'*oscillations de relaxation*.

Entre novembre 1919 et juin 1920, Blondel [21] puis Pomey [57] établissent l'équation différentielle des oscillations entretenues par une lampe à trois électrodes et par un arc chantant en modélisant la caractéristique d'oscillation de chacun de ces dispositifs au moyen d'une fonction *quintique* et respectivement d'une *cubique*.

En mars 1926, en empruntant à Pomey [57] la représentation par une fonction *cubique* de sa caractéristique d'oscillation, Blondel [26] obtient l'équation différentielle des oscillations entretenues par l'arc chantant de Duddell [33, 34] qui est en tous points similaire à celle qu'établit concomitamment Van der Pol [67]. Ce fait est particulièrement troublant et on peut naturellement s'interroger sur la connaissance que Van der Pol a pu avoir des travaux de Blondel et inversement. Cependant, il paraît très difficile de répondre à cette question. Il faudrait pour cela avoir accès aux archives personnelles de Van der Pol ainsi qu'à celles de Blondel afin de rechercher une trace matérielle comme par exemple un des articles de Blondel [14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 26] qui aurait pu être en possession de Van der Pol et *vice versa* ou une correspondance dans laquelle Blondel aurait cité les travaux de Van der Pol [65, 67]. On peut néanmoins faire remarquer que Blondel qui était âgé en 1926 de soixante-trois ans faisait autorité dans le domaine de l'Électrotechnique et de la Radio-électricité. Lauréat du Franklin Institute en 1912, il avait été élu membre de l'Académie des Sciences en 1913 et, avait reçu par la suite de nombreuses distinctions honorifiques comme la Médaille Mascart ou le prix Montefiore. Il avait été également Président d'honneur de la Société française des Électriciens, Vice-Président de *The Illuminating Engineering Society* de Londres et Vice-Président de la Société Internationale de Électriciens. Il avait été membre du Comité Scientifique de la revue *La Lumière Électrique* aux côtés d'Henri Poincaré, de la revue allemande *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphic und Telephonie* aux côtés notamment de John Ambrose Fleming auprès duquel travailla Van der Pol et Président du comité de rédaction de la *Revue Générale de l'Électricité*. Ses travaux avaient connu une notoriété internationale. Aussi, il est très peu probable que Van der Pol n'en n'ait pas eu connaissance. En ce qui concerne, le mathématicien russe Aleksandr' Andronov pour lequel le même type d'interrogation peut se poser, on trouve dans l'édition originale russe de son ouvrage *Теория колебаний* (*Théorie des oscillations*) [4, p. 217, p. 252, p. 279, p. 412] plusieurs paragraphes dédiés aux oscillations entretenues par un arc électrique qui renvoient aux travaux de Blondel [19, 21] et montrent qu'ils ont

servis de préalable à Andronov pour l'étude de dispositifs plus complexes comme le *multivibrateur* d'Abraham et Bloch par exemple.

Ainsi, si Blondel paraît avoir devancé Van der Pol d'une année dans dans la mise en équation complète de la lampe à trois électrodes et dans la définition d'un *système auto-entretenu*, il ne semble pas avoir été en mesure de mettre en évidence le caractère *lent-rapide* propre aux *oscillations de relaxation* alors qu'il fut pourtant l'un des premiers à les observer dans l'*arc chantant*. Néanmoins, sa contribution à l'émergence des concepts d'*oscillations de relaxation* par Van der Pol et d'*oscillations auto-entretenu*es par Andronov paraît avoir été un élément indispensable à l'élaboration de la théorie des oscillations non linéaires.

#### ACKNOWLEDGMENTS

Je souhaite adresser tous mes remerciements à M. Scott Walter qui m'a transmis cette correspondance entre A. Blondel et E. Cartan.



## RÉFÉRENCES

- [1] H. ABRAHAM & E. BLOCH, Mesure en valeur absolue des périodes des oscillations électriques de haute fréquence, *Annales de Physique*, 9 (1919) 237-302.
- [2] A.A. ANDRONOV, Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний, in *IVs'ezd russkikh fizikov* (5-16.08, p. 23-24). Moscow : N.-Novgorod, Kazan, Saratov ; [Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations, Ce rapport a été lu lors du IV<sup>e</sup> congrès des physiciens russes à Moscou du 5 au 16 août 1928, p. 23-24].
- [3] A.A. ANDRONOV, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenuës, *C.R.A.S.*, 189 (14 octobre 1929) 559-561.
- [4] A.A. ANDRONOV & S.E. КНАИКИН, Теория колебаний [Théorie des oscillations], Объединное Научно-Техническое Издательство, НКТП, СССР, главная редакция техно-теоретической литературы, Москва 1937 Ленинград. Trad. angl., *Theory of oscillations*, Princeton : Princeton University Press, 1949.
- [5] A.A. ANDRONOV & S.E. КНАИКИН, Собрание трудов, [*Œuvres complètes*], Moscow : Izd. AN SSSR, 1956.
- [6] A.A. ANDRONOV, A.A. ВИТТ & S.E. КНАИКИН, Теория колебаний [Théorie des oscillations], Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959. Trad. angl., *Theory of oscillators*, Oxford : Pergamon Press, 1966.
- [7] E.V. APPLETON & B. VAN DER POL, On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43 (1922) 177-193.
- [8] H. BARKHAÜSEN, *Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen*, Leipzig : S. Hirzel, 1907.
- [9] J. BETHENOD, André Blondel, *Revue Générale de l'Électricité*, 44 (1938) 751-756.
- [10] A. BLONDEL, Études expérimentales sur l'arc à courants alternatifs, *La Lumière Électrique*, XLII (1891) 551- 560 et 618-623, XLIII (1891) 51- 61.
- [11] A. BLONDEL, Oscillographes : nouveaux appareils pour l'étude des oscillations électriques lentes, *C.R.A.S.*, 116 (6 mars 1893) 502-506.
- [12] A. BLONDEL, Nouvelles recherches sur l'arc à courants alternatifs, *La Lumière Électrique*, XLIX, (1893) 502-508, 557-569 et 608-617.
- [13] A. BLONDEL, Sur les phénomènes de l'arc électrique, *J. Phys. Théor. Appl.*, (3<sup>e</sup> série) VI (octobre 1897) 513-520.
- [14] A. BLONDEL, Sur les phénomènes de l'arc chantant, *C.R.A.S.*, 140 (13 juin 1905) 1680-1682.
- [15] A. BLONDEL, Sur les phénomènes de l'arc chantant, *R.G.S.P.A.*, 16 (1905) 708 ; *J. Phys. Théor. Appl.*, (4<sup>e</sup> série) V (février 1906) 77-97.

- [16] A. BLONDEL, Sur les phénomènes de l'arc chantant, *Éclairage Électrique*, XLIV (1905) 41-58 & 81-104.
- [17] A. BLONDEL, *Notice sur les Travaux Scientifiques et Techniques de M. André Blondel*, Paris : Gauthier-Villars, 1911.
- [18] A. BLONDEL, Sur l'origine de la télégraphie sans fil par étincelles musicales, *C.R.A.S.*, 156 (3 février 1913), 371-373.
- [19] A. BLONDEL, Sur les systèmes à oscillations persistantes, et en particulier sur les oscillations entretenues par auto-amorçage, *J. Phys. Théor. Appl.*, (5<sup>e</sup> série) IX (avril 1919) 117-151 et 153-161.
- [20] A. BLONDEL, Caractéristiques d'oscillations des lampes à trois électrodes utilisées comme générateurs d'oscillations entretenues, *C.R.A.S.*, 169 (20 octobre 1919) 676-680.
- [21] A. BLONDEL, Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs, *C.R.A.S.*, 169 (17 novembre 1919) 943-948.
- [22] A. BLONDEL, Étude graphique du fonctionnement des audions à circuit résonant comme récepteurs sensibilisés ou comme désamortisseurs, *C.R.A.S.*, 169 (8 décembre 1919) 1377-1382.
- [23] A. BLONDEL, Théorie graphique des audions générateurs et calcul de l'amplitude des oscillations, *Radioélectricité*, 1 (juin 1920) 7-13 et 63-72.
- [24] A. BLONDEL, Sur les conditions de rendement des lampes-valves génératrices ayant une caractéristique d'arc électrique chantant et sur la définition de leur puissance, *C.R.A.S.*, 177 (9 juillet 1923) 87-92.
- [25] A. BLONDEL, Méthode rationnelle pour les essais de spécification des lampes triodes destinées à fonctionner en clapet, *C.R.A.S.*, 177 (23 juillet 1923) 376-382.
- [26] A. BLONDEL, Contribution à la théorie de l'arc chantant musical, *C.R.A.S.*, 182 (12 avril 1926) 900-903.
- [27] K. F. BRAUN, Über ein Verfahren zur Demonstration und zum Studium des zeitlichen Verlaufes variabler Ströme, *Ann. Physik Chemie*, 60 (1897) 552-559.
- [28] LOUIS DE BROGLIE, Notice sur La vie et l'oeuvre d'André Blondel, Membre de l'Académie des Sciences, *C.R.A.S.*, 219 (18 décembre 1944), 656; Paris, Gauthier-Villars (1944).
- [29] E. & H. CARTAN, Note sur la génération des oscillations entretenues, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, 14 (1925) 1196-1207.
- [30] P. CURIE, Équations réduites pour le calcul des mouvements amortis, *La Lumière Électrique*, (1<sup>re</sup> série) 41 (1891) 201-209, 270-276 et 307-362.
- [31] P. DAVID, Les oscillations par décharges (Relaxation Oscillations), *Onde Électrique*, t. 6, vol. 69 (sept. 1927) 38A.
- [32] W. DU BOIS DUDELL, Oscillographs, *The Electrician*, 39 (1897) 636-638.
- [33] W. DU BOIS DUDELL,  
On Rapid Variations in the Current through the Direct-Current Arc,  
*Journ. Inst. Elec. Eng.*, 30 (1900) 232-283.
- [34] W. DU BOIS DUDELL  
On Rapid Variations in the Current through the Direct-Current Arc,  
*The Electrician*, 46 (1900) 269-273 et 310-313.

- [35] W. DU BOIS DUDDELL, The Musical Arc, *The Electrician*, 52 (1901) 902.
- [36] J.M. GAUGAIN, Mémoire sur la décharge disruptive, *Annales de Chimie Physique*, (4<sup>e</sup> série) 8 (juin 1866) 75-134.
- [37] J.M. GINOUX, Analyse mathématique des phénomènes oscillatoires non linéaires, *Thèse de troisième cycle, Université Pierre & Marie Curie, Paris VI*.
- [38] J.M. GINOUX & S. WALTER, La contribution fondamentale des Cartan à la théorie des oscillations non linéaires, *soumis*.
- [39] P. JANET, Application de l'arc chantant de Duddell à la mesure des faibles coefficients de self-induction, *C.R.A.S.*, 134 (24 février 1902) 462-463.
- [40] P. JANET, Sur une analogie électrotechnique des oscillations entretenues, *C.R.A.S.*, 168 (14 avril 1919) 764-766.
- [41] P. JANET, Note sur une ancienne expérience d'électricité appliquée, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, 14 (1925) 1193-1195.
- [42] J.M.A. GÉRARD-LESCUYER, Sur un paradoxe électrodynamique, *C.R.A.S.*, 168 (16 juillet 1880) 226-227.
- [43] H. LÉAUTÉ, Mémoire sur les oscillations à longue période dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations, *Journal de l'École Polytechnique*, 55 (1885) 1-126.
- [44] PH. LE CORBEILLER, *Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation*, Paris : Hermann (Actualités scientifiques et industrielles, vol. 144) (conférences des 6 et 7 mai 1931 au Conservatoire des Arts et Métiers).
- [45] PH. LE CORBEILLER, Le mécanisme de la production des oscillations, *Annales des P.T.T.*, 21 (1932) 697-731.
- [46] A. LIÉNARD, Étude des oscillations entretenues, *Revue générale de l'Électricité*, 23 (1928) 901-912 et 946-954.
- [47] A. LUGGIN, Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen, *Centralblatt für Elektrotechnik*, X (1888) 567-581.
- [48] H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, 7 (1881) 375-422.
- [49] H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, 8 (1882) 251-296.
- [50] H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, 1 (1885) 167-244.
- [51] H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, 2 (1886) 151-217.
- [52] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris : Gauthier-Villars, 1892, 1893, 1899.
- [53] H. POINCARÉ, Sur la télégraphie sans fil, *Lumière Électrique* 4 (1908) 259-266, 291-297, 323-327, 355-359 & 387-393.
- [54] H. POINCARÉ, *La Dynamique de l'électron*, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones* Paris : A. Dumas (Mars 1913).

- [55] H. POINCARÉ,  
*Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation,*  
*Acta Mathematica*, **7** (1885) 259-380.
- [56] H. POINCARÉ, *Notice sur les Travaux Scientifiques de Henri Poincaré,*  
Paris : Gauthier-Villars, 1886.
- [57] J.B. POMEY,  
*Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie,*  
Paris, Gauthier-Villars, 1920.
- [58] J.B. POMEY,  
*Cours d'Électricité Théorique*, Tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1914.
- [59] J.B. POMEY,  
*Cours d'Électricité Théorique*, Tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- [60] J.B. POMEY,  
*Cours d'Électricité Théorique*, Tome III, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
- [61] LORD RAYLEIGH OU J.W. STRUTT, On maintained vibrations, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **5** (15) (1883) 229-235.
- [62] TH. SIMON, Tnende Flammen und Flammentelephonie,  
*Elektrotechnische Zeitschrift*, **22** (20 juin 1901) 510-514.
- [63] TH. SIMON, Zur Theorie der selbsttönenden Lichtbogens,  
*Physikalische Zeitschrift*, **7** (1906) 433-445.
- [64] W. THOMSON (LORD KELVIN), On transient electric currents, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, (Series 4) **5** (1853) 393-405.
- [65] B. VAN DER POL,  
A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations,  
*Radio Review*, London, **1** (1920), 701-710 et 754-762.
- [66] B. VAN DER POL,  
Het onderling verband tusschen eenige moderne vorderingen in de draadloze telegrafie en telefonie, [Sur certaines corrélations dans les progrès récents de la télégraphie sans fil et de la téléphonie.] *Polytechnisch Weekblad*, **19** (19 novembre 1925) 791-794.
- [67] B. VAN DER POL, On « relaxation-oscillations »,  
*The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **7** (2) (1926) 978-992.
- [68] B. VAN DER POL & J. VAN DER MARK, Le battement du cœur considéré comme oscillation de relaxation et un modèle électrique du cœur, *Onde Électrique*, **7** (1928), 365-392.
- [69] B. VAN DER POL, Oscillations sinusoïdales et de relaxation,  
*Onde Électrique*, **9** (1930), 245-256 et 293-312.
- [70] J. ZENNECK, The importance of Radiotelegraphy in Science, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **17** (1929) 89-114.

## APPENDIX

Blondel a sans doute observé des oscillations entretenues lors d'expérimentations sur son oscilloscope comme sur la Fig. 13, et pour expliquer leur construction (Figs. 8, 9 et 10), il va les comparer à une sinusode de référence (en pointillés sur la figure).

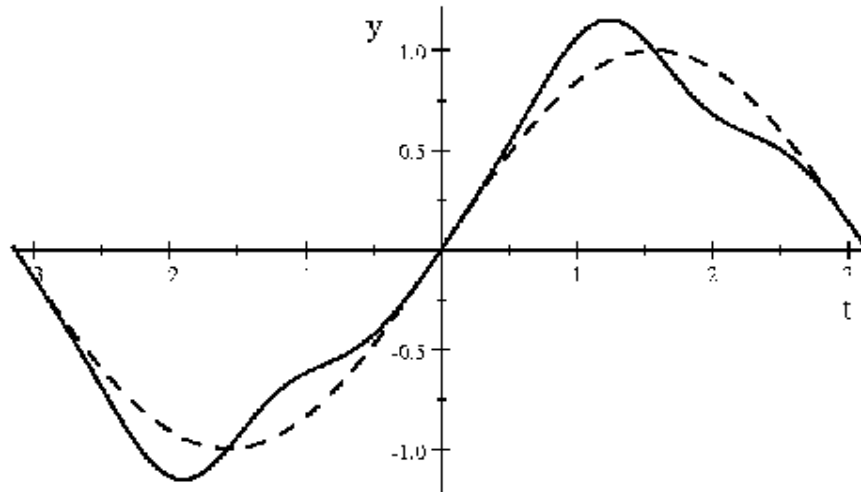


FIGURE 13. Ligne continue : une période d'oscillation entretenue, ligne pointillée : fonction sinus.

Il précise cette différence en utilisant la formule

$$(1) \quad \rho = Ae^{(-\alpha + j\beta)t}$$

qui lui permet de tracer un diagramme comme à la Fig. 14 (où  $A = 1$ ) que l'on peut comparer à la Fig. 9.

Cette représentation transforme la sinusode de référence en un cercle qui va lui servir de gabarit pour appuyer sa construction d'oscillation entretenue ; son but étant de construire une courbe fermée, formée en partie de ce qu'il appelle spirales logarithmiques (aujourd'hui on dirait plutôt exponentielles), qui oscille autour du cercle de référence. Cette représentation peut toutefois gagner encore en clarté si le graphique de la fonction (1) n'est pas tracé dans le système de coordonnées cartésienne  $(x, y)$  comme à la Fig. 14, mais plutôt dans le système de coordonnées  $(t, \rho)$  qui représente le temps sur l'axe des abscisses et le rayon sur l'axe des ordonnées (Fig. 15), la sinusode de la Fig. 13 étant alors représentée par la droite d'ordonnée  $\rho = A = 1$ .

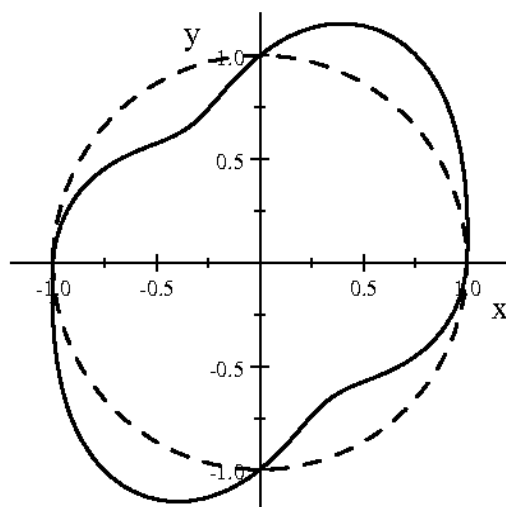


FIGURE 14. Ligne fermée continue : une période d'oscillation entretenue, ligne pointillée : fonction sinus représentée sous forme d'un cercle trigonométrique.

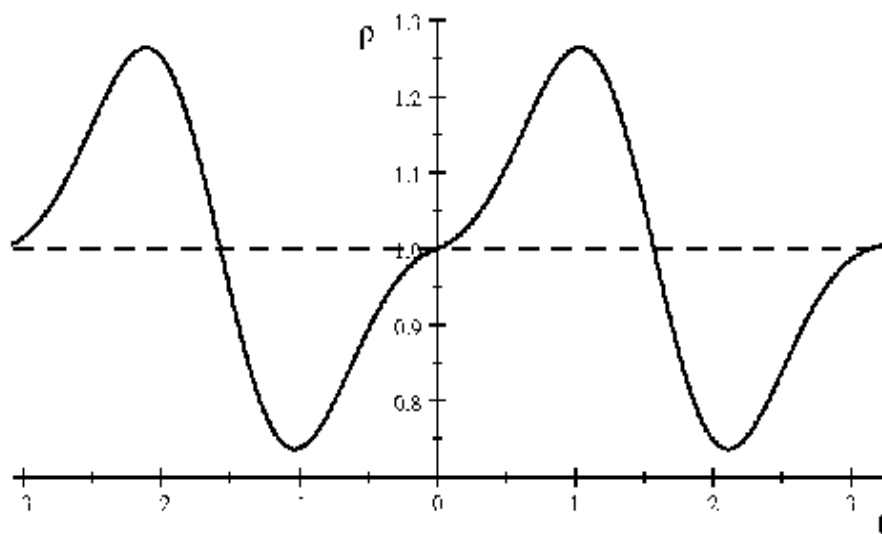


FIGURE 15. Ligne continue : une période d'oscillation entretenue, ligne pointillée : fonction sinus représentée sous forme d'une droite,  $A = 1$ .

Ces nouvelles coordonnées permettent de développer sans limite les courbes lorsqu'elles tournent autour du centre O, au lieu de les concentrer sur une partie bornée du plan comme dans les figures de Blondel. Elles permettent aussi de mieux observer la convergence de plusieurs courbes issues de conditions initiales différentes qui tendraient vers un cycle limite, sans qu'elles ne se superposent comme elles le feraient sur la Fig. 8. L'écart entre l'oscillation entretenue et la sinusode (ou le cercle) de référence étant représenté plus explicitement : sur la Fig. 15, c'est l'écart vertical entre la courbe continue et la droite en pointillés.

Pour réexaminer les figures de Blondel dans ce nouveau système de coordonnées, on peut réécrire l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}
 (2) \quad z(t) &= x(t) + iy(t) = r(t) \cos(\beta t) + ir(t) \sin(\beta t) \\
 &= Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t) + iAe^{-\alpha t} \sin(\beta t)
 \end{aligned}$$

La Fig. 8 se transforme alors en la Fig. 16.

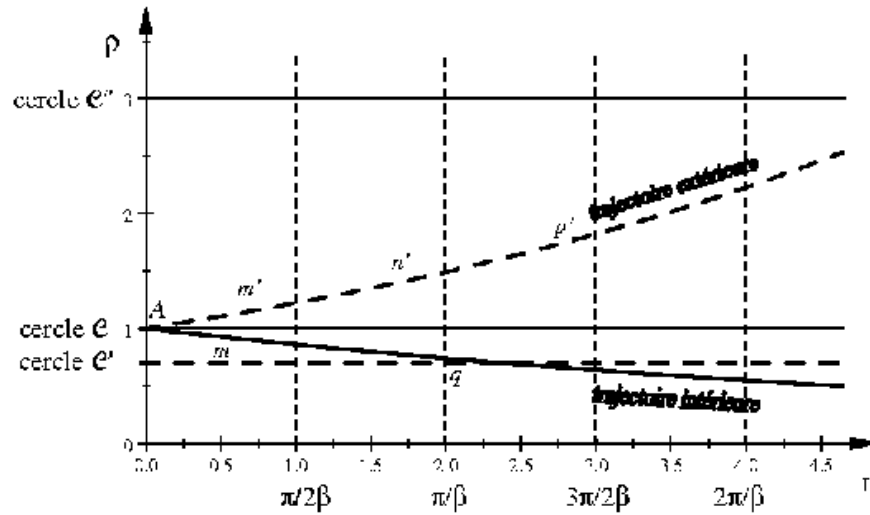


FIGURE 16. Représentation de la Fig. 8 dans le système de coordonnées  $(t, \rho)$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

Les fonctions sin et cos de l'équation (2) n'ont pas à être représentées, ce qui en simplifie l'analyse. Le centre O de la Fig. 8 est développé en la droite de l'axe du temps sur la Fig. 16. Les trois cercles C, C', C'' sont représentés par des droites d'ordonnée respectives :  $\rho = A$ ,  $\rho = C'$ ,  $\rho = C''$ . La spirale logarithmique de Blondel décrite par le point mobile m, devient une courbe homothétique à une fonction exponentielle  $r(t) =$

$Ae^{-\alpha t}$ , qui partant du point  $(O, A)$  va décroître et traverser le cercle  $C'$  pour  $\alpha > 0$ , c'est-à-dire  $-\alpha < 0$ , ou croître et traverser le cercle  $C''$  pour  $\alpha > 0$  mais quand  $-\alpha$  est remplacé par  $+\alpha$  comme indiqué :

« ... Pour qu'il y ait stabilité, il est nécessaire que le phénomène d'entretien donne au système oscillant un amortissement très petit, mais légèrement positif, c'est-à-dire que  $-\alpha$  soit remplacé par  $+\alpha$  et la spirale  $Amq$  de rayon décroissant est remplacé par une autre spirale logarithmique  $Am'n'p'$ . » [19, p. 154]

Sur la Fig. 16, ces courbes sont légèrement prolongées au-delà de  $t = \frac{2\pi}{\beta}$  (un tour de cercle). L'écart entre une de ces deux courbes et chacun de ces cercles, est à chaque instant  $t$ , égal à la distance verticale des éléments tracés. La constante  $A$  d'une courbe est déterminée par la valeur de la courbe au temps  $t = 0$ . On peut alors faire l'analyse de la méthode de Blondel pour la construction des oscillations entretenues de la Fig. 9 remplacée ici par la Fig. 17.

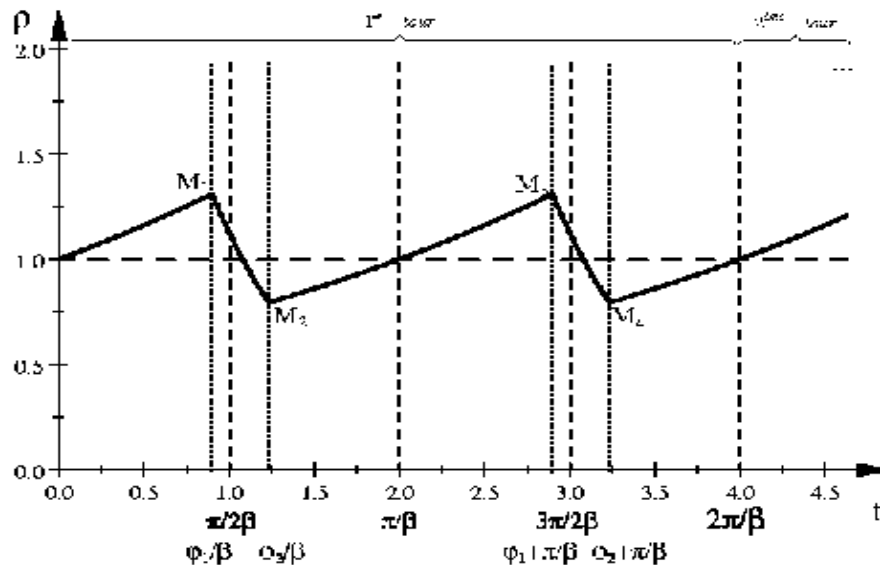


FIGURE 17. Représentation de la Fig. 9 dans le système de coordonnées  $(t, \rho)$ .

Soit  $\frac{\phi_1}{\beta}$  (resp.  $\frac{\phi_2}{\beta}$ ) la valeur du temps qui correspond au point  $M_1$  (resp.  $M_2$ ). En raison des symétries centrales utilisées par Blondel pour définir les points  $M_3$  et  $M_4$ , l'abscisse de ces points vaut  $\frac{\phi_1 + \pi}{\beta}$  (resp.  $\frac{\phi_2 + \pi}{\beta}$ ).



À la Fig. 9, il essaye de construire une solution périodique (un cycle dont ne sait pas encore s'il est attractif ou répulsif), de façon géométrique, en s'appuyant sur le cercle C qui lui sert de guide. En partant du point A il veut retourner au point A. Pour aller de A à  $M_1$  (respectivement du symétrique de A à  $M_3$ ) l'accroissement est exponentiel, le point  $M_1$  a pour coordonnées  $\left(\frac{\phi_1}{\beta}, Ae^{\left(\alpha\frac{\phi_1}{\beta}\right)}\right)$ . Blondel dessine ensuite une partie de la solution de  $M_1$  à  $M_2$  (et de façon symétrique  $M_3$  à  $M_4$ ) sans donner de formule, mais son explication est ambiguë car il dit à la fois que le régime devient amorti ( $\alpha < 0$ ) ce qui pourrait se comprendre avec les formules déjà utilisée  $r(t) = Ae^{+\alpha t}$  avec  $\alpha$  changeant de signe, et de façon contradictoire que « le vecteur  $\rho$  est diminué d'après une loi compliquée ». La seule contrainte géométrique qu'il se donne est que la solution partant du point  $M_2$ , doit, en croissant de la même façon exponentielle que de A à  $M_1$ , passer par le symétrique de A, puis arriver au point  $M_3$ . Il ne calcule pas les coordonnées du point  $M_2$ .

La raison probable pour laquelle Blondel est en difficulté dans cette partie comprise entre  $M_1$  et  $M_2$  de la courbe, vient de l'existence de points anguleux aux raccords en  $M_1$ ,  $M_2$ , (et aussi  $M_3$ ,  $M_4$ ) si l'on n'utilise que ses spirales logarithmiques comme il le propose (ce qui est tracé à la Fig. 17). Il indique à propos d'une figure similaire concernant les diapasons, où la difficulté est la même :

« ... le régime dans l'angle  $M_1OM_2$  est troublé et n'est plus représenté en fonction du temps que de façon schématique. On conservera celle-ci en admettant que dans les angles de régime troublé le *temps* varie suivant une loi différente et non explicite. » [19, p. 155-156]

### Remarques :

- Si l'on utilise strictement des spirales logarithmiques, il existe une famille de solutions qui lient l'angle  $\frac{\phi_2}{\beta}$  à l'ordonnée de  $M_2$ .
- La théorie des fonctions splines créée en 1946, permet actuellement de résoudre le problème des points anguleux.

Blondel, arrivé au maximum des possibilités d'abstraction en raison des connaissances mathématiques de son époque, ne s'intéresse pas à ce qui peut se passer autour de cette solution qui pourrait être un cycle limite. La différence entre les Fig. 8 et 9 est qu'effectivement le cercle  $C''$  de la Fig. 8 pourrait être un cycle attractif (on ne peut pas en sortir, sans qu'on dise comment) et  $C$  un cycle répulsif, mais qu'en faisant les modifications de  $M_1$  à  $M_2$  et de  $M_3$  à  $M_4$ , ce cercle  $C$  est franchi par la trajectoire et perd son statut de cercle invariant.

Dans le système de coordonnées que nous utilisons, il est facile de représenter un cycle limite attractant, en traçant autour de l'oscillation entretenue construite à partir des spirales logarithmiques de Blondel, des solutions partant d'un point initial proche de  $A$ , qui convergent vers elle, comme à la Fig. 18.

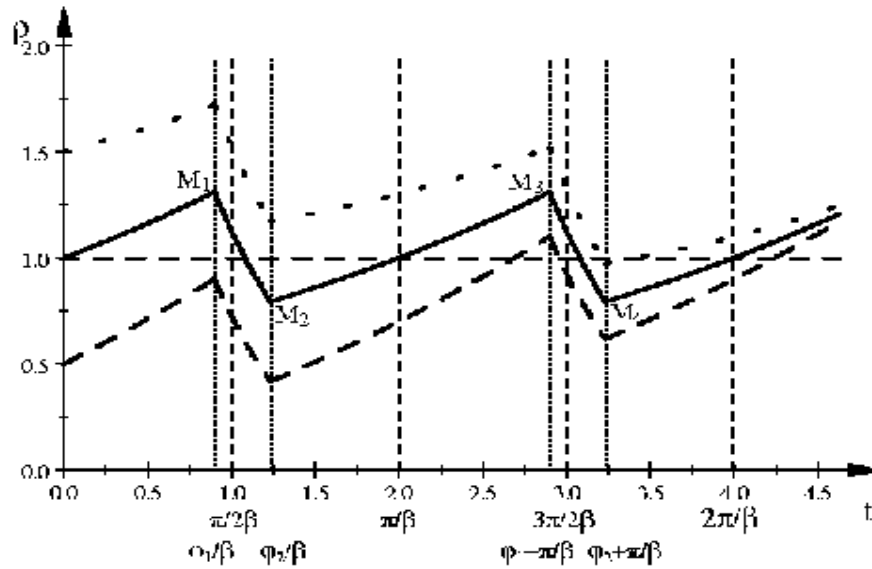


FIGURE 18. Solutions convergent vers le cycle limite de la Fig. 17.

<sup>1</sup> LABORATOIRE PROTEE, I.U.T. DE TOULON, UNIVERSITÉ DU SUD, BP 20132, F-83957 LA GARDE CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* ginoux@univ-tln.fr

<sup>2</sup> LABORATOIRE LABORATOIRE J.A. DIEUDONNÉ, UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS, PARC VALROSE, 06108 NICE CEDEX 02, FRANCE  
*E-mail address:* lozi@unice.fr